



Kekuatan Sisi Refleksif pada Graf *Path Comb* Titik Graf *Friendship*

Nasywa 'Athiyyatur Rafii'^{a,*}, Diari Indriati^b

^{a,b} Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret, Jl. IR. Sutami 36A Kentingan, Surakarta 57126, Indonesia

* Alamat Surel: nasywarafii@student.uns.ac.id

Abstrak

Graf $G(V, E)$ atau ditulis G , terdiri dari himpunan tak kosong titik V , dengan jumlah titik dinotasikan dengan $|V|$, dan himpunan sisi E , dengan jumlah sisi dinotasikan dengan $|E|$. Pelabelan- k refleksif tak teratur sisi adalah pemberian label bilangan bulat positif $\{1, 2, \dots, k_e\}$ sebagai label sisi dan bilangan genap non-negatif $\{0, 2, \dots, 2k_v\}$ sebagai label titik dengan $k = \max\{k_e, 2k_v\}$, sehingga bobot tiap sisi berbeda. Kekuatan sisi refleksif dari graf G dinotasikan dengan $res(G) = k$ dengan nilai k adalah pelabelan terbesar yang minimum diantara beberapa pelabelan refleksif tak teratur sisi yang mungkin. Pada artikel ini dibahas pelabelan- k refleksif tak teratur sisi pada graf hasil operasi *comb* titik dari graf *path* dan graf *friendship* ($P_n \triangleright f_m$) untuk $n \geq 2, m = 2, 3$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa $res(P_n \triangleright f_m)$ untuk $n \geq 2, m = 2, 3$ adalah $\lceil \frac{3mn+(n-1)}{3} \rceil + 1$ jika $3mn + (n - 1) \equiv 2, 3 \pmod{6}$ dan $\lceil \frac{3mn+(n-1)}{3} \rceil$ jika $3mn + (n - 1) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}$.

Kata kunci:

Pelabelan- k refleksif tak teratur sisi, kekuatan sisi refleksif, graf *path comb* titik graf *friendship*.

© 2026 Dipublikasikan oleh Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang

1. Pendahuluan

Diberikan suatu graf G yang terdiri dari himpunan hingga tak kosong V berisi objek-objek yang disebut titik, yang dipasangkan dengan himpunan E , yaitu himpunan (mungkin kosong) dari pasangan dua unsur berbeda dari V , yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik dan sisi dari graf G , dituliskan sebagai $V(G)$ dan $E(G)$, dengan jumlah titik dinotasikan $|V(G)|$ dan jumlah sisi dinotasikan $|E(G)|$. Wallis *et al.* (2002) mendefinisikan pelabelan suatu graf adalah pemetaan elemen-elemen pada graf, baik titik, sisi, maupun keduanya (pelabelan total) ke dalam bilangan bulat positif atau non-negatif.

Pada tahun 2017, Ryan *et al.* (Bača *et al.*, 2017) memperkenalkan sebuah konsep baru pelabelan- k total tak teratur, yaitu pelabelan- k refleksif tak teratur titik dan pelabelan- k refleksif tak teratur sisi. Pelabelan- k refleksif tak teratur sisi dalam graf G merupakan pemberian label bilangan bulat positif $\{1, 2, \dots, k_e\}$ sebagai label sisi dan bilangan genap non-negatif $\{0, 2, \dots, 2k_v\}$ sebagai label titik. Ryan *et al.* (Bača *et al.*, 2017) juga mendefinisikan bahwa kekuatan tak teratur sisi refleksif dari graf G yang dinotasikan dengan $res(G) = k$ dengan nilai k adalah label terbesar yang minimum diantara beberapa pelabelan refleksif tak teratur sisi yang mungkin. Berikut diberikan Lema untuk menentukan $res(G)$ menurut Ryan *et al.* (Bača *et al.*, 2017).

Lema 1. Untuk setiap graf G ,

$$res(G) \geq \left\lceil \frac{|E(G)|}{3} \right\rceil + 1, \text{ jika } |E(G)| \equiv 2, 3 \pmod{6} \quad \left\lceil \frac{|E(G)|}{3} \right\rceil, \text{ jika } |E(G)| \not\equiv 2, 3 \pmod{6}$$

To cite this article:

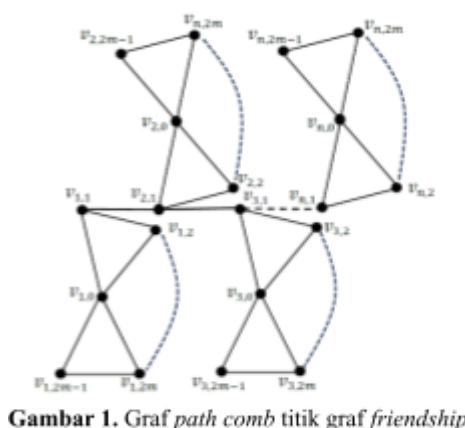
Rafii', N. A., & Indriati, D. (2026). Kekuatan Sisi Refleksif pada Graf *Path Comb* Sisi Graf *Friendship*. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 9*, 420-424

Pada pelabelan refleksif tak teratur sisi, terdapat beberapa graf yang telah diteliti dan menghasilkan $res(G)$, diantaranya Tanna *et al.*, (2017) meneliti graf Prisma D_n dan graf $Wheel W_n$; Indriati *et al.* (2020) meneliti graf $path$ korona graf $complete K_1$ dan graf $path$ korona graf $path P_2$; Rahmawati dan Indriati (2021) meneliti graf $Umbrella U_{3,n}$ dan $U_{4,n}$; Bača *et al.* (2017) meneliti graf $Generalized Friendship f_{n,m}$. Berbeda dari penelitian Bača *et al.* (2017), pada penelitian ini akan ditentukan $res(G)$ pada graf hasil operasi $comb$ titik pada graf $Path$ dan graf $Friendship (P_n \triangleright f_m)$ untuk $n \geq 2$ dan $m = 2, 3$.

2. Pembahasan

Menurut Darmaji & Alfarisi (2017), operasi $comb$ titik pada graf G dan H , dinotasikan $G \triangleright H$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan dari graf G dan sebanyak $|V(G)|$ salinan dari graf H , dan menempelkan salah satu titik pada salinan ke- j dari graf H pada titik ke- j dari graf G . Graf $path comb$ titik graf $friendship$, dinotasikan $P_n \triangleright f_m$ diperoleh dengan menempelkan salah satu titik dari salinan graf f_m (yaitu titik $v_{i,1}$) pada setiap titik $v \in V(P_n)$ pada graf P_n .

Graf $path comb$ titik graf $friendship (P_n \triangleright f_m)$ memiliki $|E(P_n \triangleright f_m)| = 3mn + (n - 1)$. Graf $path comb$ titik graf $friendship (P_n \triangleright f_m)$ memiliki himpunan titik $V(P_n \triangleright f_m) = \{v_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq 2m\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \triangleright f_m) = \{v_{i,j}v_{i+1,j} | 1 \leq i \leq n, j = 1\} \cup \{v_{i,0}v_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2m\} \cup \{v_{i,j}v_{i,j+1} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Graf



Gambar 1. Graf $path comb$ titik graf $friendship$

$path comb$ titik graf $friendship (P_n \triangleright f_m)$ diilustrasikan seperti Gambar 1.

Kekuatan sisi refleksif dari graf $path comb$ titik graf $friendship (P_n \triangleright f_m)$ dapat diperoleh melalui Teorema 1.

Teorema 1. Untuk $P_n \triangleright f_m$ dengan $n \geq 2$ dan $m = 2, 3$.

$$res(P_n \triangleright f_m) = \left\lceil \frac{3mn + (n-1)}{3} \right\rceil + 1, \text{ jika } 3mn + (n-1) \equiv 2, 3 \pmod{6} \quad \left\lfloor \frac{3mn + (n-1)}{3} \right\rfloor \quad (1)$$

Bukti. Pertama dibuktikan batas bawah dari $res(P_n \triangleright f_m)$. Karena graf $path comb$ titik graf $friendship$ mempunyai $3mn + (n - 1)$ sisi, dengan menggunakan Lema 1. diperoleh

$$res(P_n \triangleright f_m) \geq \left\lceil \frac{3mn + (n-1)}{3} \right\rceil + 1, \text{ jika } 3mn + (n-1) \equiv 2, 3 \pmod{6} \quad \left\lfloor \frac{3mn + (n-1)}{3} \right\rfloor \quad (2)$$

Selanjutnya, akan ditetapkan batas atas dari $res(G)$ untuk graf $path comb$ titik graf $friendship (P_n \triangleright f_m)$ dengan $m = 2, 3$. Didefinisikan η pada pelabelan- k untuk graf $path comb$ titik graf $friendship$

$(P_n \triangleright f_m)$ dengan $k = \lceil \frac{3mn+(n-1)}{3} \rceil + 1$ jika $3mn + (n - 1) \equiv 2, 3 \pmod{6}$ dan $k = \lceil \frac{3mn+(n-1)}{3} \rceil$ jika $3mn + (n - 1) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}$ dengan cara berikut.

2.1. *Graf path comb titik graf friendship $P_n \triangleright f_m$ dengan $n \geq 2$ dan $m = 2$*

Dikonstruksikan η pada pelabelan- k graf *path comb* titik graf *friendship* $P_n \triangleright f_m$ dengan $n \geq 2$ dan $m = 2$. Untuk label titik dari $P_n \triangleright f_m$ dengan $2 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq 2m$, dituliskan sebagai berikut,

$$\eta(v_{i,j}) = \{2i + (2r + 2), \text{ untuk } 2 \leq i \leq n, j = 0, 3, 4 \text{ } 2i + (2r), \text{ untuk } 2 \leq i \leq n, j = 1, 2$$

$$\text{dengan } r = \lfloor \frac{i-3}{6} \rfloor.$$

Untuk label sisi dari $P_n \triangleright f_m$ dengan $n \geq 2$ dan $m = 2$, dituliskan sebagai berikut,

$$\eta(v_{i,j} v_{i,j+1}) = \{2i + (2r - 1), \text{ untuk } i \equiv 4 \pmod{6}, j = 3; i \equiv 5 \pmod{6}, j = 1 \text{ } 2i + (2r - 3), \text{ untuk } i \equiv 3 \pmod{6}, j$$

$$\eta(v_{i,0} v_{i,j}) = \{2i + 2r, \text{ untuk } i \equiv 1 \pmod{6}, j = 1; i \equiv 0, 2 \pmod{6}, j = 2, 4; i \equiv 1 \pmod{6}, j = 3 \text{ } 2i + (2r -$$

$$\eta(v_{i,1} v_{i+1,1}) = \{2i + (2r + 2), \text{ untuk } i \equiv 2, 4 \pmod{6} \text{ } 2i + (2r + 4), \text{ untuk } i \equiv 0 \pmod{6} \text{ } 2i + (2r + 1), \text{ unt}$$

$$\text{dengan } r = \lfloor \frac{i-2}{6} \rfloor.$$

Bobot sisi dari graf *path comb* titik graf *friendship* $P_n \triangleright f_m$ dengan $n \geq 2$ dan $m = 2$ sebagai berikut.

$$wt_{\eta}(v_{i,j} v_{i+1,j}) = 7i, \text{ untuk } 2 \leq i \leq n, j = 1$$

$$wt_{\eta}(v_{i,0} v_{i,j}) = 7i + j - 6, \text{ untuk } 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4$$

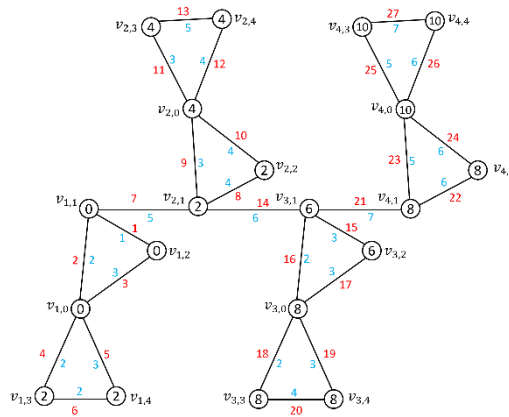
$$wt_{\eta}(v_{i,j} v_{i,j+1}) = \{7i - 6, \text{ untuk } 2 \leq i \leq n, j = 1 \text{ } 7i - 1, \text{ untuk } 2 \leq i \leq n, j = 3$$

Dari bobot sisi, dapat dilihat bahwa graf *path comb* titik graf *friendship* $P_n \triangleright f_m$ untuk $n \geq 2$ dan $m = 2$ mempunyai bobot berbeda, sehingga η memenuhi elemen pelabelan- k refleksif tak teratur sisi. Batas bawah sama dengan batas atas, maka dari itu $res(P_n \triangleright f_m)$ adalah

$$\lceil \frac{3mn+(n-1)}{3} \rceil + 1 \text{ jika } 3mn + (n - 1) \equiv 2, 3 \pmod{6} \text{ dan}$$

$$\lceil \frac{3mn+(n-1)}{3} \rceil \text{ jika } 3mn + (n - 1) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}. \text{ Dengan demikian, teorema terbukti. } \blacksquare$$

Ilustrasi pelabelan-10 refleksif tak teratur sisi graf *path comb* titik graf *friendship* $P_4 \triangleright f_2$ terdapat di Gambar 2. Pada gambar tersebut, angka berwarna hitam menunjukkan label titik, angka berwarna biru menunjukkan label sisi, dan angka berwarna merah menunjukkan bobot sisi.



Gambar 2. Pelabelan-10 refleksif tak teratur sisi ($P_4 \triangleright f_2$)

2.2. *Graf path comb titik graf friendship $P_n \triangleright f_m$ dengan $n \geq 2$ dan $m = 3$*

Dikonstruksikan η pada pelabelan- k graf *path comb* titik graf *friendship* $P_n \triangleright f_m$ dengan $n \geq 2$ dan $m = 3$. Untuk label titik dari $P_n \triangleright f_m$ dengan $n \geq 2$ dan $m = 3$, dituliskan sebagai berikut,

$$\eta(v_{i,j}) = \{2i + (4r), \text{ untuk } i \equiv 2 \pmod{3}, j = 1, 2; 2i + (4r + 2), \text{ untuk } i \equiv 0 \pmod{3}, j = 1, 2; i \equiv 2 \pmod{3}, j = 0 \text{ dan } i \equiv 0 \pmod{3}, j = 0\}$$

$$\text{dengan } r = \lfloor \frac{i-2}{3} \rfloor.$$

Untuk label sisi dari $P_n \triangleright f_m$ dengan $n \geq 2$ dan $m = 3$, dituliskan sebagai berikut,

$$\eta(v_{i,j}v_{i,j+1}) = \{2i + (4r + 3), \text{ untuk } 2 \leq i \leq n, j = 5; 2i + 4r, \text{ untuk } 2 \leq i \leq n, j = 3; 2i + (4r - 1), \text{ untuk } 2 \leq i \leq n, j = 1, 2\}$$

$$\eta(v_{i,0}v_{i,j}) = \{2i + (4r + 2), \text{ untuk } 2 \leq i \leq n, j = 6; 2i + (4r - 1), \text{ untuk } 2 \leq i \leq n, j = 2, 4; 2i + (4r - 2), \text{ untuk } 2 \leq i \leq n, j = 1, 3, 5\}$$

$$\eta(v_{i,1}v_{i+1,1}) = \{2i + (4r + 4), \text{ untuk } i \equiv 0, 2 \pmod{3}; 2i + (4r + 6), \text{ untuk } i \equiv 1 \pmod{3}\}$$

$$\text{dengan } r = \lfloor \frac{i-2}{3} \rfloor.$$

Bobot sisi dari $P_n \triangleright f_m$ dengan $n \geq 2$ dan $m = 3$ sebagai berikut.

$$wt_{\eta}(v_{i,1}v_{i+1,1}) = 10i, \text{ untuk } 2 \leq i \leq n$$

$$wt_{\eta}(v_{i,0}v_{i,j}) = \{10i + j - 9, \text{ untuk } 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4; 10i + j - 8, \text{ untuk } 2 \leq i \leq n, j = 5, 6\}$$

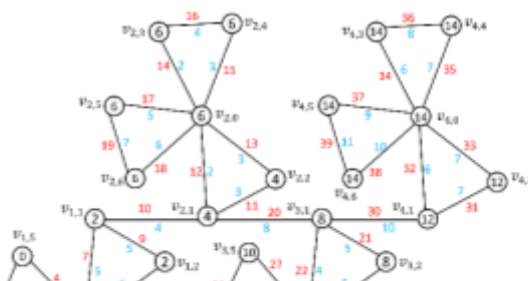
$$wt_{\eta}(v_{i,j}v_{i,j+1}) = \{10i - 9, \text{ untuk } 2 \leq i \leq n, j = 1; 10i - 4, \text{ untuk } 2 \leq i \leq n, j = 3; 10i - 1, \text{ untuk } 2 \leq i \leq n, j = 5\}$$

Dari bobot sisi, dapat dilihat bahwa graf *path comb* titik graf *friendship* $P_n \triangleright f_m$ untuk $n \geq 2, m = 3$ mempunyai bobot berbeda, sehingga η memenuhi elemen pelabelan- k refleksif tak teratur sisi. Batas bawah sama dengan batas atas, maka dari itu $res(P_n \triangleright f_m)$ adalah

$$\lfloor \frac{3mn + (n-1)}{3} \rfloor + 1 \text{ jika } 3mn + (n-1) \equiv 2, 3 \pmod{6} \text{ dan}$$

$$\lfloor \frac{3mn + (n-1)}{3} \rfloor \text{ jika } 3mn + (n-1) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}. \text{ Dengan demikian, teorema terbukti. } \blacksquare$$

Diberikan ilustrasi pelabelan-14 refleksif tak teratur sisi graf *path comb* titik graf *friendship* $P_4 \triangleright f_3$ di Gambar 3. Pada gambar tersebut, angka berwarna hitam menunjukkan label titik, angka berwarna biru menunjukkan label sisi, dan angka berwarna merah menunjukkan bobot sisi.



3. Simpulan

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh kesimpulan, yaitu kekuatan sisi refleksif pada $(P_n \triangleright f_m)$ dengan $n \geq 2$ dan $m = 2, 3$ adalah $\lceil \frac{3mn+(n-1)}{3} \rceil + 1$ jika $3mn + (n - 1) \equiv 2, 3 \pmod{6}$ dan $\lfloor \frac{3mn+(n-1)}{3} \rfloor$ jika $3mn + (n - 1) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}$. Penulis berharap bagi pihak yang tertarik dengan topik pelabelan refleksif tak teratur sisi maupun kekuatan sisi refleksif pada graf dapat melakukan penelitian untuk menentukan kekuatan sisi refleksif graf *friendship comb* titik graf *path* $f_m \triangleright P_n$ untuk $n \geq 2$ dan $m > 3$.

4. Ucapan Terima Kasih

Kami menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Kementerian Pendidikan Tinggi, Sains, dan Teknologi atas dana penelitian yang diberikan melalui program Riset Fundamental Reguler dengan nomor kontrak 105/C3/DT.05.00/PL/2025 serta kepada LPPM UNS melalui Surat Perjanjian Penugasan Penelitian dengan nomor 1186.1/UN27.22/PT.01.03/2025.

Daftar Pustaka

- Bača, M., Jendrol', S., Miller, M., & Ryan, J. (2007). On Irregular Total Labeling, *Discrete Mathematics*, 307, 1378–1388.
- Bača, M., Irfan, M., Ryan, J., Semaničová-Feňovčíková, A., & Tanna, D. (2017). On Edge Irregular Reflexive Labellings for the Generalized Friendship Graphs, *Mathematics*, 67(5), 1–11.
- Darmaji, & Alfarisi, R. (2017). On the Partition Dimension of Comb Product of Path and Complete Graph, In *AIP Conference Proceedings*, 1867(1), 020038.
- Indriati, D., Widodo, & Rosyida, I. (2020). Edge Irregular Reflexive Labeling on Corona of Path and Other Graphs, In *Journal of Physics: Conference Series*, 1489 (1), 012004.
- Rahmawati, N. A., & Indriati, D. (2021). Edge Irregular Reflexive Labeling on Umbrella Graphs $U_{3,n}$ and $U_{4,n}$, In *AIP Conference Proceedings*, 2326(1), 020021.
- Tanna, D., Ryan, R., Semaničová-Feňovčíková, A., & Bača, M. (2017). Vertex Irregular Reflexive Labeling of Prism and Wheel, In *AKCE International Journal of Graph and Combinatorics*.
- Wallis, W. D., MacDougall, J. A., Miller, M., & Slamin. (2002). Vertex Magic Total Labelings of Graph, *Utilitas Mathematica*, 61, 3-21.