



Spektrum Variasi Graf Barbel $B(n, 3)$

Neli Septiana Putri^{a,*}, Isnaini Rosyida^b

^{a,b} Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang, Gunungpati, 50229, Indonesia

* neli492@students.unnes.ac.id, isnaini@mail.unnes.ac.id

Abstrak

Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk menganalisis penentuan spektrum dari variasi graf barbel $B(n, 3)$, di mana variasi tersebut dilakukan dengan memodifikasi jumlah simpul pada jembatan antar graf lengkap pada graf barbel. Spektrum tersebut berisi nilai-nilai eigen dari matriks ketetanggaan variasi graf barbel beserta multiplisitasnya. Metode dalam analisis ini menggunakan bantuan pemrograman Python dengan pendekatan aljabar linear seperti determinan dan faktorisasi polinomial karakteristik. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa terdapat perbedaan pendistribusian nilai eigen yang dihasilkan pada nilai n yang berbeda. Kemudian, penentuan spektrumnya dilakukan menggunakan Prinsip Induksi Matematika. Diperoleh hasil penelitian spektrum ini adalah $Spec(B(n, 3)) = [-1, 2n - 4, \lambda_1, 1, \lambda_2, 1, \lambda_3, 1, \lambda_4, 1, \lambda_5, 1, \lambda_6, 1, \lambda_7, 1]$.

Kata kunci:

Spektrum, Variasi Graf Barbel, Aljabar Linear, Nilai Eigen, Matriks Ketetanggaan, Polinomial Karakteristik.

© 2026 Dipublikasikan oleh Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang

1. Pendahuluan

Aljabar linear merupakan salah satu cabang penting dalam ilmu matematika yang berfokus pada kajian vektor, sistem persamaan linear, dan transformasi linear. Salah satu objek utama dalam aljabar linear adalah matriks. Konsep-konsep seperti nilai eigen dan vektor eigen memungkinkan pemodelan dan analisis sistem linear yang kompleks dalam bentuk yang lebih terstruktur. Dalam konteks ini, matriks merupakan representasi yang efisien untuk menyatakan relasi linear antar elemen dalam suatu sistem. Kemudian, salah satu bidang yang memberikan kontribusi besar dalam penerapan konsep aljabar linear adalah teori graf. Dalam teori graf, suatu graf dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks, seperti matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*).

(Jones, 2013) Matriks *adjacency* dari graf sederhana merupakan matriks $n \times n$ dimana entri pada baris ke- i dan kolom ke- j adalah bernilai 0 atau 1. Dalam konteks ini, nilai-nilai eigen dari matriks ketetanggaan graf tersebut disebut sebagai spektrum graf. Oleh karena itu, untuk menentukan spektrum *adjacency* graf maka diperlukan penjabaran dari matriks ketetanggaan, nilai eigen, dan multiplisitas graf tersebut.

Graf barbel merupakan salah satu kelas graf yang belum banyak dibahas dalam kajian spektrum graf karena penelitian sebelumnya membahas mengenai pelabelan dan banyak pohon pembangun graf barbel. (Agasthi et al., 2016) Graf barbel $B(p, n)$ merupakan graf yang diperoleh dengan menghubungkan n buah graf lengkap K_p oleh sebuah *bridge*. (Eka R & Rahadjeng, 2014) Graf lengkap dengan p simpul, dilambangkan dengan K_p , adalah graf sederhana dengan p simpul dan setiap dua simpul berhubungan langsung. Kemudian, untuk setiap simpul pada graf komplit berderajat $n - 1$. (Budayasa, 2007) Misalkan e merupakan sebuah sisi dari graf G , maka $G - \{e\}$ adalah graf yang

To cite this article:

Neli Septiana Putri., & Isnaini Rosyida. (2026). Spektrum Variasi Graf Barbel $B(n, 3)$. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 9*, 425-430

diperoleh dari G dengan menghapus sisi e dari G . Jika $G - \{e\}$ merupakan graf tidak terhubung, maka e disebut jembatan (*bridge*).

Sedangkan pada penelitian ini, variasi graf barbel dilakukan dengan menambahkan simpul pada jembatan. Variasi graf barbel $B(n, k)$ merupakan graf tak berarah yang dibentuk dengan menghubungkan dua buah graf lengkap K_n melalui sebuah *bridge* yang terdiri atas k simpul. Variasi dilakukan dengan menambahkan tiga simpul pada jembatan. Kajian terhadap variasi ini menjadi signifikan karena memungkinkan untuk menelusuri bagaimana perubahan dalam struktur graf mempengaruhi dimensi ruang eigen secara umum. Sehingga, tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan hasil spektrum dari variasi graf barbel $B(n, 3)$ beserta karakteristiknya.

Studi mengenai spektrum graf telah dilakukan terhadap beberapa jenis graf tertentu. (Agustina et al., 2022) Spektrum graf adalah matriks yang memuat nilai-nilai eigen pada baris pertama dan multiplisitas pada baris kedua. Penelitian oleh Agustina dkk. ini mengkaji spektrum graf sederhana seperti graf bintang, graf mahkota, dan graf tangga. Berbeda dengan penelitian tersebut, penelitian ini mengkaji variasi dari graf barbel. Di mana graf barbel merupakan graf yang terdiri atas dua graf lengkap K_n kemudian dihubungkan oleh jembatan. Secara struktural graf barbel lebih kompleks karena memadukan dua jenis keterhubungan, yaitu keterhubungan penuh dan keterhubungan jalur. Penelitian ini menawarkan kontribusi baru dari sisi objek kajian graf yang belum dibahas dalam penelitian Agustina dkk.

Penelitian selanjutnya dilakukan oleh (Oktriyansa et al., 2022) membahas spektrum matriks *laplace* dari graf bipartit lengkap, termasuk bentuk polinomial karakteristik dan nilai eigen beserta multiplisitasnya. Penelitian ini berhasil menentukan rumus umum spektrum *laplace* untuk graf tersebut dengan menunjukkan pola tertentu tergantung pada ukuran graf.

Penelitian oleh (Kholifah et al., 2022) menghasilkan bentuk umum dari spektrum *detour* dan indeks *detour* dari graf berlian Br_n untuk $n \geq 3$. Hasil penelitian ini juga dapat digunakan untuk analisis lebih lanjut dalam teori graf dan aplikasi terkait. Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian tersebut diawali dengan menggambar graf berlian, menentukan matriks *detour*, menghitung polinomial karakteristik, serta merumuskan bentuk umum spektrum dan indeks *detour* dari graf berlian Br_n untuk $n \geq 3$.

Beberapa studi yang meneliti mengenai spektrum graf selanjutnya dilakukan oleh (Komarullah, 2024) yang menganalisis spektrum adjacency dari graf buku segitiga ($K_{1,1,n}$). Penelitian oleh (Karmilawati, 2023) mengenai spektrum *detour* pada graf helm tertutup (CH_n). Penelitian oleh (Abdy et al., 2020) mengenai spektrum matriks *detour* dari Graf Roda dengan $n + 1$ Titik W_n . Kemudian penelitian oleh (Mulyani et al., 2013) mengenai spektrum pada graf reguler kuat.

Dengan mengkaji variasi graf barbel dari sudut pandang spektral, penelitian ini diharapkan dapat memperluas pemahaman mengenai hubungan antar struktur graf kompleks dengan representasi spektralnya. Selain itu, penelitian ini juga diharapkan memberi kontribusi teoritis dalam pengembangan analisis spektral graf menggunakan pendekatan aljabar linear.

2. Metode

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif-kuantitatif yang bersifat teoritis dan eksploratif. Pendekatan ini digunakan untuk menganalisis struktur dan spektrum variasi graf barbel berdasarkan konsep-konsep aljabar linear dengan subjek utamanya yaitu variasi graf barbel $B(n, 3)$. Jenis penelitian ini termasuk dalam kategori penelitian murni (*pure research*) di bidang matematika, khususnya dalam cabang aljabar linear dan teori graf.

Proses analisis data dalam penelitian ini terdiri atas beberapa langkah berikut:

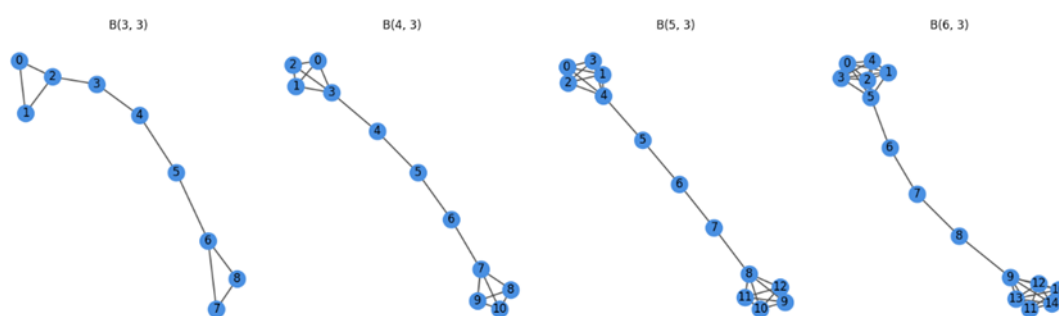
- (1) Mengumpulkan data berupa struktur variasi graf barbel yang dibentuk secara sintetik dengan memodifikasi jumlah simpul pada jalur penghubung.

- (2) Membentuk graf ke dalam matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*) yang merepresentasikan keterhubungan antar simpul.
- (3) Menghitung nilai-nilai eigen dari matriks ketetanggaan.
- (4) Menentukan vektor-vektor eigen dari setiap nilai eigen dari masing-masing ruang eigen.
- (5) Menghitung dimensi ruang eigen sebagai ukuran dari banyaknya vektor bebas linear yang menyusun ruang tersebut.
- (6) Menganalisis hasil polinomial karakteristik dari matriks ketetanggaan variasi graf barbel dengan menggunakan pendekatan aljabar linear, metode induksi matematika, dan juga komputasi Python.
- (7) Menganalisis hasil spektrum dari variasi graf.
- (8) Menyimpulkan hasil analisis untuk mengidentifikasi pola hubungan antara struktur graf dan karakteristik spektralnya.

3. Hasil dan Pembahasan

Variasi graf barbel $B(n, 3)$ merupakan graf tak berarah yang dibentuk dengan menghubungkan dua buah graf lengkap K_n melalui sebuah simpul tengah pada jembatan. Secara struktur graf ini dapat digambarkan sebagai jalur $K_n - x - y - z - K_n$, dengan x, y dan z sebagai simpul pada jembatan yang terhubung langsung ke masing-masing graf lengkap.

Berikut ini merupakan gambar dari variasi graf barbel $B(n, 3)$ dengan $n = 3, 4, 5$ dan 6



Gambar 1. Gambar variasi graf barbel.

3.1. Struktur Variasi Graf Barbel $B(n, 3)$

Lema 3.1. Jumlah simpul pada variasi graf barbel $B(n, 3)$ adalah

$$|V(B(n, 1))| = 2n + 3$$

Bukti:

Misalkan $|V(K_n)|$ menyatakan jumlah simpul pada graf lengkap K_n , dengan $|V(K_n)| = n$, maka

$$|V(B(n, 3))| = |V(K_n)| + |\{x\}| + |\{y\}| + |\{z\}| + |V(K_n)|$$

$$= n + 1 + 1 + 1 + n = 2n + 3$$

Dengan demikian, Lema 3.1 terbukti. ■

3.2. Matriks Ketetanggaan $B(n, 3)$

Berdasarkan definisi variasi graf barbel dan Lema 3.1 diketahui bahwa ukuran matriks ketetanggaan pada variasi graf barbel $B(n, 3)$ adalah $(2n + 3) \times (2n + 3)$. Matriks ketetanggaan dari variasi graf barbel ini dinotasikan sebagai $A(B(n, 3))$, berikut ini merupakan bentuk umumnya:

$$A(B(n, 3)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa bentuk matriks ketetanggaan variasi graf barbel $B(n, 3)$ secara umum dapat dibuat blok-blok matriks yang terdiri atas dua blok matriks ketetanggaan graf lengkap $A(K_n)$, dua blok matriks nol, dan empat blok matriks lainnya yang berbeda.

3.3. Polinomial Karakteristik $B(n, 3)$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dari variasi graf barbel $B(n, 3)$, maka dapat ditentukan polinomial karakteristiknya dengan cara menyelesaikan $\det(\lambda I - A(B(n, 3))) = 0$.

Berikut ini tabel yang berisi polinomial karakteristik dari matriks ketetanggaan variasi graf barbel $B(n, 3)$ untuk $n = 3, 4, 5, \dots, 10$ hasil dari program di atas.

Tabel 1. Polinomial Karakteristik Matriks Ketetanggaan $B(n, 3)$

Variasi Graf Barbel $B(n, 3)$	Polinomial Karakteristik Matriks Ketetanggaan
$B(3, 3)$	$(\lambda + 1)^2(\lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 1)(\lambda^4 - \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 4)$
$B(4, 3)$	$(\lambda + 1)^4(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 2)(\lambda^4 - 2\lambda^3 - 6\lambda^2 + 6\lambda + 6)$
$B(5, 3)$	$(\lambda + 1)^6(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda + 3)(\lambda^4 - 3\lambda^3 - 7\lambda^2 + 9\lambda + 8)$
$B(6, 3)$	$(\lambda + 1)^8(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 6\lambda + 4)(\lambda^4 - 4\lambda^3 - 8\lambda^2 + 12\lambda + 10)$
$B(7, 3)$	$(\lambda + 1)^{10}(\lambda^3 - 5\lambda^2 - 7\lambda + 5)(\lambda^4 - 5\lambda^3 - 9\lambda^2 + 15\lambda + 12)$
$B(8, 3)$	$(\lambda + 1)^{12}(\lambda^3 - 6\lambda^2 - 8\lambda + 6)(\lambda^4 - 6\lambda^3 - 10\lambda^2 + 18\lambda + 14)$
$B(9, 3)$	$(\lambda + 1)^{14}(\lambda^3 - 7\lambda^2 - 9\lambda + 7)(\lambda^4 - 7\lambda^3 - 11\lambda^2 + 21\lambda + 16)$
$B(10, 3)$	$(\lambda + 1)^{16}(\lambda^3 - 8\lambda^2 - 10\lambda + 8)(\lambda^4 - 8\lambda^3 - 12\lambda^2 + 24\lambda + 18)$

Berdasarkan polinomial karakteristik pada Tabel 1, untuk membentuk polinomial $B(n, 3)$ dapat diperoleh dari $B(n - 1, 3)$ dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p_n(\lambda) &= (\lambda + 1)^{2(n-1)-4+2}(\lambda^3 - ((n-1) - 2 + 1)\lambda^2 - ((n-1) + 1)\lambda + (n-1) - 2 + 1)(\lambda^4 - ((n-1) - 2 + 1)\lambda^3 - ((n-1) + 2)\lambda^2 + (3(n-1) - 6)\lambda + 2(n-1) - 2) \\ &= (\lambda + 1)^{2n-4}(\lambda^3 - (n-2)\lambda^2 - n\lambda + n-2)(\lambda^4 - (n-2)\lambda^3 - (n+2)\lambda^2 + (3n-6)\lambda + 2n-2). \end{aligned}$$

Dari kasus-kasus di atas, dapat diperkirakan bahwa pola untuk $p_n(\lambda)$ adalah

$$p_n(\lambda) = (\lambda + 1)^{2n-4}(\lambda^3 - (n-2)\lambda^2 - n\lambda + n-2)(\lambda^4 - (n-2)\lambda^3 - (n+2)\lambda^2 + (3n-6)\lambda + 2n-2).$$

Sehingga akan dibuktikan melalui Lema berikut ini.

Lema 3.3. Polinomial karakteristik dari matriks ketetanggaan variasi graf barbel $B(n, 3)$ untuk $n \geq 3$ adalah

$$p_n(\lambda) = (\lambda + 1)^{2n-4}(\lambda^3 - (n-2)\lambda^2 - n\lambda + n-2)(\lambda^4 - (n-2)\lambda^3 - (n+2)\lambda^2 + (3n-6)\lambda + 2n-2).$$

Bukti:

Untuk menentukan bentuk umum polinomial karakteristik dari matriks ketetanggaan variasi graf barbel $B(n, 3)$, dapat menggunakan pendekatan rekursif berdasarkan sifat struktur graf dan karakteristik nilai eigen dari graf lengkap. Pendekatan ini bertujuan untuk menunjukkan bahwa setiap penambahan orde n pada graf lengkap K_n mempertahankan bentuk umum polinomial karakteristik yang diberikan dalam Lema 3.3.

Langkah 1: Basis Induksi

Untuk $n = 3$, dari hasil komputasi simbolik seperti pada tabel diperoleh bahwa:

$$p_3(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 1)(\lambda^4 - \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 4)$$

Bentuk ini sesuai dengan rumus umum:

$$p_n(\lambda) = (\lambda + 1)^{2n-4}(\lambda^3 - (n-2)\lambda^2 - n\lambda + n-2)(\lambda^4 - (n-2)\lambda^3 - (n+2)\lambda^2 + (3n-6)\lambda + 2n-2).$$

Untuk $n = 3$, karena

- Nilai eigen pertama

$$(\lambda + 1)^{2n-4} = (\lambda + 1)^{2(3)-4} = (\lambda + 1)^2$$

- Nilai eigen pada faktor kubik

$$(\lambda^3 - (n-2)\lambda^2 - n\lambda + n-2) = (\lambda^3 - (3-2)\lambda^2 - 3\lambda + 3-2)$$

- Nilai eigen pada faktor berderajat empat

$$\begin{aligned} & (\lambda^4 - (n-2)\lambda^3 - (n+2)\lambda^2 + (3n-6)\lambda + 2n-2) \\ &= (\lambda^4 - (3-2)\lambda^3 - (3+2)\lambda^2 + (3(3)-6)\lambda + 2(3)-2) \\ &= (\lambda^4 - \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 4) \end{aligned}$$

Sehingga basis induksi untuk $n = 3$ terbukti benar.

Langkah 2: Langkah Induksi

Asumsi Induksi: Misalkan untuk suatu bilangan bulat $n = k \geq 3$, polinomial karakteristik dari variasi graf barbel $B(k, 3)$ adalah

$$p_k(\lambda) = (\lambda + 1)^{2k-4}(\lambda^3 - (k-2)\lambda^2 - k\lambda + k-2)(\lambda^4 - (k-2)\lambda^3 - (k+2)\lambda^2 + (3k-6)\lambda + 2k-2).$$

Asumsikan jika $p_k(\lambda)$ benar.

Akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k + 1$, bentuk polinomial karakteristik $p_{k+1}(\lambda)$ tetap

mengikuti rumus:

$$p_k(\lambda) = (\lambda + 1)^{2(k+1)-4}(\lambda^3 - ((k+1)-2)\lambda^2 - (k+1)\lambda + (k+1)-2)(\lambda^4 - ((k+1)-2)\lambda^3 - ((k+1)+2)\lambda^2 -$$

Sederhanakan

- Nilai eigen pertama

$$(\lambda + 1)^{2(k+1)-4} = (\lambda + 1)^{2k-2}$$

- Nilai eigen pada faktor kubik

$$(\lambda^3 - ((k+1)-2)\lambda^2 - (k+1)\lambda + (k+1)-2)$$

$$= (\lambda^3 - (k-1)\lambda^2 - (k+1)\lambda + k-1)$$

- Nilai eigen pada faktor berderajat empat

$$\begin{aligned} & (\lambda^4 - ((k+1)-2)\lambda^3 - ((k+1)+2)\lambda^2 + (3(k+1)-6)\lambda + 2(k+1)-2) \\ &= (\lambda^4 - (k-1)\lambda^3 - (k+3)\lambda^2 + (3k-3)\lambda + 2k) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$p_{k+1}(\lambda) = (\lambda+1)^{2k-2} (\lambda^3 - (k-1)\lambda^2 - (k+1)\lambda + k-1) (\lambda^4 - (k-1)\lambda^3 - (k+3)\lambda^2 + (3k-3)\lambda + 2k)$$

Perhatikan bahwa perubahan dari $n = k$ ke $n = k+1$ mengubah setiap koefisien dalam faktor kubik sesuai dengan aturan linear terhadap n . Ini menyiratkan bahwa bentuk umum yang diberikan memiliki struktur rekursif yang stabil terhadap penambahan orde simpul n . Hal ini dikarenakan setiap bagian dari polinomial karakteristik tersebut, baik pangkat, koefisien, maupun faktor linearnya berubah secara konsisten dan linear terhadap n .

Dengan demikian, Lema 3.3 terbukti. ■

3.4. Spektrum $B(n, 3)$

Lema 3.4. Misal $B(n, 3)$ adalah variasi graf barbel dengan jumlah simpul 3 pada jembatannya, maka spektrumnya Adalah

$$\text{Spec}(B(n, 3)) = \begin{bmatrix} -1 & 2n-4 & \lambda_1 & 1 & \lambda_2 & 1 & \lambda_3 & 1 & \lambda_4 & 1 & \lambda_5 & 1 & \lambda_6 & 1 & \lambda_7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bukti:

Berdasarkan Lema 3.3, diperoleh bentuk umum polinomial karakteristik dari variasi graf barbel $B(n, 3)$ untuk setiap $n \geq 3$ adalah

$$p_n(\lambda) = (\lambda+1)^{2n-4} (\lambda^3 - (n-2)\lambda^2 - n\lambda + n-2) (\lambda^4 - (n-2)\lambda^3 - (n+2)\lambda^2 + (3n-6)\lambda + 2n-2).$$

Sehingga, berdasarkan Lema 3.3 diperoleh

- Nilai eigen $(\lambda+1)^{2n-4}$

Hal ini berarti $\lambda = -1$, dengan multiplisitas $2n-4$.

- Nilai eigen $(\lambda^3 - (n-2)\lambda^2 - n\lambda + n-2)$

Hal ini berarti terdapat tiga akar polinomial kubik berbeda sebagai nilai eigen yaitu λ_1, λ_2 , dan λ_3 dengan masing-masing multiplisitasnya adalah 1.

- Nilai eigen $(\lambda^4 - (n-2)\lambda^3 - (n+2)\lambda^2 + (3n-6)\lambda + 2n-2)$

Hal ini berarti terdapat empat akar polinomial berderajat empat berbeda sebagai nilai eigen yaitu $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ dan λ_7 dengan masing-masing multiplisitasnya adalah 1.

Maka berdasarkan definisi spektrum menurut (Agustina et al., 2022), diperoleh

$$\text{Spec}(B(n, 3)) = \begin{bmatrix} -1 & 2n-4 & \lambda_1 & 1 & \lambda_2 & 1 & \lambda_3 & 1 & \lambda_4 & 1 & \lambda_5 & 1 & \lambda_6 & 1 & \lambda_7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, Lema 3.4 terbukti. ■

4. Simpulan

Penelitian ini telah mengkaji analisis spektrum dari variasi graf barbel berbentuk $B(n, 3)$. Dengan menggunakan pendekatan aljabar linear melalui matriks ketetanggaan, diperoleh hasil spektrum dari variasi graf barbel $B(n, 3)$ yaitu:

$$\text{Spec}(B(n, 3)) = \left[-1, 2n - 4, \lambda_1, 1, \lambda_2, 1, \lambda_3, 1, \lambda_4, 1, \lambda_5, 1, \lambda_6, 1, \lambda_7, 1 \right].$$

Berdasarkan penentuan spektrum variasi graf barbel pada pembahasan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa semakin bertambah n , maka semakin banyak pula nilai eigen yang muncul. Selain itu, analisis spektrum pada variasi graf barbel memberikan kontribusi penting dalam memahami keterkaitan antara struktur graf dan sifat-sifat aljabarnya.

Daftar Pustaka

- Abdy, M., Syam, R., & Putri, A. M. (2020). Spectrum matriks detour dari graf roda dengan $n+1$ titik W_n . *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, 3(1), 32–40.
- Agasthi, P., Parvathi, N., & Thirusangu, K. (2016). On some labelings of barbell graph. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 12(1), 273–280.
- Agustina, Y., Kusumastuti, N., & Fran, F. (2022). Spektrum adjacency dari graf bintang, graf mahkota, dan graf tangga. *Buletin Ilmiah Matematika, Statistika, dan Terapannya (Bimaster)*, 11(2), 355–362.
- Budayasa, I. K. (2007). *Teori graf dan aplikasinya*. Unesa University Press.
- Eka R, S., & Rahadjeng, B. (2014). Dimensi metrik pada graf lintasan, graf komplit, graf sikel, graf bintang, dan graf bipartit komplit. *Mathunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 3(1), 1–6.
- Jones, O. (2013). *Spectra of simple graphs* (pp. 1–20). Whitman College.
- Karmilawati. (2023). Spektrum detour pada graf helm tertutup. *Buletin Ilmiah Matematika, Statistika, dan Terapannya (Bimaster)*, 12(6), 561–568.
- Kholifah, O., Nurshiami, S. R., & Maryani, S. (2022). Spektrum detour dan indeks detour dari graf berlian. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Terapannya (Senamantra)*, 3, 103–116.
- Komarullah, H. (2024). The adjacency spectrum of triangular book graphs. *Proceeding of International Conference on Education and Sharia*, 1(1), 89–93.
- Mulyani, R., Triyani, & Larasati, N. (2013). Spektrum pada graf reguler kuat. *JMP*, 1, 13–21.
- Oktriyansa, R., Triyani, & Nurshiami, S. R. (2022). Spektrum Laplace pada graf bipartit lengkap $(K_{\square, \square})$. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Terapannya (Senamantra)*, 3, 51–64.