



Kekuatan Sisi Refleksif pada Graf Lintasan *Comb* Sisi Graf Matahari

Dian Mufarikha^{a,*}, Diari Indriati^b

^{ab} Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret, Jalan Ir. Sutami 36A Kentingan, Surakarta 57126, Indonesia

* Alamat Surel: dianliputo@student.uns.ac.id

Abstrak

Penelitian ini membahas mengenai kekuatan sisi refleksif pada graf lintasan *comb* sisi terhadap graf matahari, yaitu $P_m \oplus_e S_n$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$. Pelabelan refleksif termasuk salah satu kajian dalam teori pelabelan graf dengan pemberian label titik maupun sisi, sehingga setiap sisi memiliki bobot unik yang ditentukan melalui penjumlahan label titik dan sisi yang *incident*. Bobot sisi uv terhadap pelabelan ω dari graf G dinotasikan $wt_\omega(uv)$ yaitu $wt_\omega(uv) = \omega(u) + \omega(uv) + \omega(v)$, dengan ω merupakan fungsi pelabelan dari graf G . Penelitian dilakukan dengan menganalisis pola pelabelan dan hubungan antara jumlah titik serta sisi pada graf. Berdasarkan analisis tersebut diperoleh bahwa $|E(G)| = 6(m-1)$ dan $|V(G)| = 5(m-1) + 1$. Setiap sisi memiliki bobot unik sehingga pelabelan memenuhi sifat refleksif tak teratur sisi. Nilai kekuatan sisi refleksif diperoleh sebesar $res(G) \geq \lceil \frac{6(m-1)}{3} \rceil$, yang menunjukkan bahwa pelabelan bersifat optimal karena mencapai batas atas $\lceil \frac{6(m-1)}{3} \rceil$.

Kata kunci:

Pelabelan graf, kekuatan sisi refleksif, graf lintasan, *comb* sisi, graf matahari

© 2026 Dipublikasikan oleh Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang

1. Pendahuluan

Graf merupakan struktur matematika yang terdiri atas himpunan titik dan sisi yang menghubungkan pasangan titik tersebut. Menurut Chartrand dan Lesniak (1986), graf didefinisikan sebagai pasangan berurut $G = (V(G), E(G))$, di mana $V(G)$ adalah himpunan titik dan $E(G)$ adalah himpunan sisi yang menghubungkan titik-titik berbeda pada $V(G)$. Salah satu kajian penting dalam teori graf adalah pelabelan graf, yang pertama kali diperkenalkan oleh Wallis (1960). Pelabelan merupakan fungsi ω yang memetakan titik dan sisi graf ke himpunan bilangan bulat positif. Chartrand *et al.* (1988) pertama kali memperkenalkan konsep pelabelan tak teratur pada suatu graf G . Konsep ini menjadi dasar bagi berbagai pengembangan pelabelan graf lainnya. Perkembangan berikutnya muncul pada tahun 2007, Bača *et al.* (2007) memperkenalkan pelabelan- k total tak teratur sisi dan pelabelan- k total tak teratur titik.

Pada tahun 2017, Ryan *et al.* memperkenalkan konsep baru dari pelabelan- k total tak teratur menjadi pelabelan- k refleksif tak teratur sisi dan titik (Bača *et al.*, 2017). Dalam pelabelan refleksif sisi, titik diberi label bilangan bulat genap non negatif $\{0, 2, 4, \dots, 2k_v\}$, sedangkan sisi diberi label bilangan positif $\{1, 2, \dots, k_e\}$. Bobot sisi uv dengan pelabelan ω dinyatakan sebagai $wt_\omega(uv) = \omega(u) + \omega(uv) + \omega(v)$, dengan semua bobot sisi berbeda. Nilai minimum $k = \max\{k_e, 2k_v\}$ yang memenuhi kondisi tersebut disebut *reflexive edge strength*, disimbolkan $res(G) = k$. Penelitian ini mengkaji graf lintasan *comb* sisi graf matahari $P_m \oplus_e S_n$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ untuk menentukan nilai $res(G)$ menggunakan pelabelan- k refleksif tak teratur sisi. Berikut Lema yang diberikan oleh Ryan *et al.* (Bača *et al.*, 2017) yang dapat menjadi acuan untuk menghitung nilai $res(G)$.

To cite this article:

Mufarikha, D., Indriati, D. (2026). Kekuatan Sisi Refleksif pada Graf Lintasan *Comb* Sisi Graf Matahari. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 9*, 431-435

Lema 1. Untuk setiap graf G ,
 $res(G) \geq \lceil \frac{|E(G)|}{3} \rceil$, jika $|E(G)| \not\equiv 2, 3 \pmod{6}$, $\lfloor \frac{|E(G)|}{3} \rfloor + 1$, jika $|E(G)| \equiv 2, 3 \pmod{6}$.

Salah satu bentuk graf yang menarik untuk dikaji melalui pendekatan pelabelan refleksif adalah graf hasil operasi *comb* sisi. Menurut Slamin (2018), operasi *comb* sisi $P_m \oplus_e S_n$ adalah sebuah graf yang diperoleh dari graf lintasan P_m dan $|E(P_m)|$ duplikat dari graf matahari S_n , sedemikian sehingga setiap sisi $e \in E(P_m)$ dihimpitkan dengan sisi e dari salah satu duplikat graf S_n . Operasi ini menghasilkan struktur graf baru dengan keterhubungan berlapis antara titik lintasan dan titik cabang graf matahari, sehingga membentuk pola pelabelan yang unik.

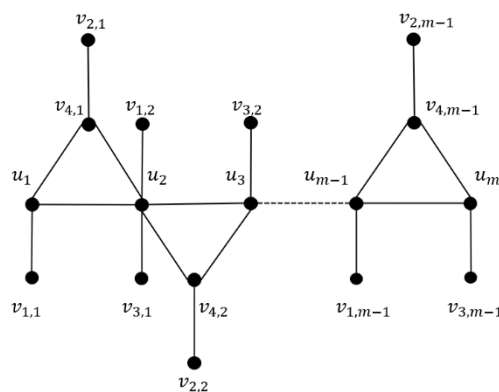
Pada pelabelan refleksif tak teratur sisi, terdapat beberapa graf yang sudah diteliti diantaranya yaitu, pada tahun 2017, Tanna *et al.* (2017) meneliti graf prisma D_n , graf kipas F_n , graf roda W_n , dan graf basket B_n . Pada tahun 2020 Indriati *et al.* (2020) meneliti graf lintasan korona graf lengkap K_1 , dan graf lintasan korona graf lintasan P_2 . Selanjutnya di tahun 2021, Setiawan dan Indriati (2021) telah melakukan penelitian graf matahari dan graf korona graf siklus dan graf *null* dengan graf dua titik $C_n \odot N_2$. Pada penelitian ini, akan dikaji graf lintasan *comb* sisi graf matahari $P_m \oplus_e S_n$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ menggunakan pelabelan- k refleksif tak teratur sisi.

Metode penelitian yang digunakan adalah konstruksi eksplisit pelabelan refleksif tak teratur sisi pada graf $P_m \oplus_e S_n$. Penelitian diawali dengan menentukan batas bawah menggunakan lema yang berlaku, kemudian dikonstruksi fungsi pelabelan pada titik dan sisi sehingga menghasilkan bobot sisi yang berbeda.

2. Pembahasan

Graf lintasan *comb* sisi terhadap graf matahari dinotasikan dengan $P_m \oplus_e S_n$, di mana P_m merupakan graf lintasan dengan m titik dan S_n merupakan graf matahari dengan n titik pada siklus dan *pendant*-nya. Graf ini dibentuk dengan menghimpitkan sisi-sisi pada graf lintasan P_m terhadap sisi-sisi pada graf matahari S_n , sehingga diperoleh graf lintasan *comb* sisi dengan struktur cabang graf matahari. Selanjutnya, didefinisikan fungsi pelabelan refleksif sebagai $\omega: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{0, 2, 4, \dots\} \cup N$, dengan titik diberi label bilangan genap non-negatif dan sisi diberi label bilangan bulat positif. Bobot sisi pada graf G didefinisikan sebagai jumlah label titik yang terhubung oleh suatu label sisi dan label sisi itu sendiri. Secara matematis dinyatakan sebagai $wt_\omega(uv) = \omega(u) + \omega(uv) + \omega(v)$, dengan ω merupakan fungsi pelabelan dari himpunan titik dari 1 hingga $2k_v$ dan himpunan sisi dari 0 hingga k_e . Suatu pelabelan disebut refleksif tak teratur sisi jika setiap sisi pada graf memiliki bobot yang unik.

Diberikan Gambar 1 menunjukkan graf hasil operasi *comb* sisi antara graf lintasan dan graf matahari $P_m \oplus_e S_n$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.



Gambar 1. Graf hasil operasi *comb* sisi antara graf lintasan dan graf matahari dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.

Graf $P_m \oplus_e S_3$ memiliki himpunan titik $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \cup \{v_{j,l} | 1 \leq j \leq 4, 1 \leq l \leq m-1\}$, dan himpunan sisi $E(G) = \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{u_i v_{j,l} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 4, 1 \leq l \leq m-1\} \cup \{v_{j,l} v_{j+2,l} | j = 2, 1 \leq l \leq m-1\}$ yang mencakup sisi lintasan utama serta sisi penghubung antara titik lintasan dan titik-titik pada cabang graf matahari. Dengan demikian, jumlah sisi graf adalah $|E(G)| = 6(m-1)$, dan jumlah titik $|V(G)| = 5(m-1) + 1$. Berdasarkan struktur graf dan jumlah titik serta sisi tersebut, selanjutnya akan ditentukan kekuatan sisi refleksif dari graf $P_m \oplus_e S_3$ menggunakan konsep pelabelan- k refleksif tak teratur sisi.

Kekuatan sisi refleksif dari graf lintasan *comb* sisi graf matahari $P_m \oplus_e S_3$ dapat diperoleh melalui Teorema 1.

Teorema 1. Untuk setiap bilangan bulat n, m dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$,

$$res(P_m \oplus_e S_n) = \lceil \frac{6(m-1)}{3} \rceil, \text{ jika } 6(m-1) \equiv 0 \pmod{6}.$$

Bukti. Dibuktikan batas bawah dari $res(P_m \oplus_e S_3)$. Graf lintasan *comb* sisi graf matahari memiliki $6(m-1)$ sisi, berdasarkan Lema 1 diperoleh

$$res(P_m \oplus_e S_3) = \lceil \frac{6(m-1)}{3} \rceil, \text{ jika } 6(m-1) \equiv 0 \pmod{6}.$$

Graf lintasan *comb* sisi graf matahari $P_4 \oplus_e S_3$ mempunyai 16 titik (u_i) untuk $1 \leq i \leq 4$; $(v_{j,l})$ untuk $1 \leq j \leq 4$ serta $1 \leq l \leq 3$, dan 18 sisi yang meliputi $(u_i u_{i+1})$ untuk $1 \leq i \leq 3$; $(u_i v_{j,l})$ untuk $1 \leq i \leq 3$ dan $j = 1$ serta $3 \leq j \leq 4$ dan $(v_{j,l} v_{j+2,l})$ untuk $j = 2$ dan $1 \leq l \leq 3$. Berdasarkan Lema (1) diperoleh batas bawah dari graf lintasan *comb* sisi graf matahari $(P_4 \oplus_e S_3) = 6$. Jadi diasumsikan $res(P_4 \oplus_e S_3) = 6$, didapatkan label terbesar sisi dan titik sebesar 6. Maka label titik dan sisi dengan bobot sisi dari 1 hingga 18, sebagai berikut,

$$\begin{aligned} wt_\omega(u_1 v_{1,1}) &= \omega(u_1) + \omega(u_1 v_{1,1}) + \omega(v_{1,1}) = 0 + 1 + 0 = 1, \\ wt_\omega(u_1 v_{4,1}) &= \omega(u_1) + \omega(u_1 v_{4,1}) + \omega(v_{4,1}) = 0 + 2 + 0 = 2, \\ wt_\omega(u_2 v_{4,1}) &= \omega(u_2) + \omega(u_2 v_{4,1}) + \omega(v_{4,1}) = 0 + 1 + 2 = 3, \\ wt_\omega(u_1 u_2) &= \omega(u_1) + \omega(u_1 u_2) + \omega(u_2) = 0 + 2 + 2 = 4, \\ wt_\omega(v_{2,1} v_{4,1}) &= \omega(v_{2,1}) + \omega(v_{2,1} v_{4,1}) + \omega(v_{4,1}) = 2 + 3 + 0 = 5, \\ wt_\omega(u_2 v_{3,1}) &= \omega(u_2) + \omega(u_2 v_{3,1}) + \omega(v_{3,1}) = 2 + 2 + 2 = 6, \\ wt_\omega(u_2 v_{1,2}) &= \omega(u_2) + \omega(u_2 v_{1,2}) + \omega(v_{1,2}) = 2 + 3 + 2 = 7, \\ wt_\omega(u_2 v_{4,2}) &= \omega(u_2) + \omega(u_2 v_{4,2}) + \omega(v_{4,2}) = 2 + 2 + 4 = 8, \\ wt_\omega(u_3 v_{4,2}) &= \omega(u_3) + \omega(u_3 v_{4,2}) + \omega(v_{4,2}) = 4 + 1 + 4 = 9, \\ wt_\omega(u_2 u_3) &= \omega(u_2) + \omega(u_2 u_3) + \omega(u_3) = 2 + 4 + 4 = 10, \\ wt_\omega(v_{2,2} v_{4,2}) &= \omega(v_{2,2}) + \omega(v_{2,2} v_{4,2}) + \omega(v_{4,2}) = 4 + 3 + 4 = 11, \\ wt_\omega(u_3 v_{3,2}) &= \omega(u_3) + \omega(u_3 v_{3,2}) + \omega(v_{3,2}) = 4 + 4 + 4 = 12, \\ wt_\omega(u_3 v_{1,3}) &= \omega(u_3) + \omega(u_3 v_{1,3}) + \omega(v_{1,3}) = 4 + 5 + 4 = 13, \\ wt_\omega(u_3 v_{4,3}) &= \omega(u_3) + \omega(u_3 v_{4,3}) + \omega(v_{4,3}) = 4 + 4 + 6 = 14, \\ wt_\omega(u_4 v_{4,3}) &= \omega(u_4) + \omega(u_4 v_{4,3}) + \omega(v_{4,3}) = 6 + 3 + 6 = 15, \\ wt_\omega(u_3 u_4) &= \omega(u_3) + \omega(u_3 u_4) + \omega(u_4) = 4 + 6 + 6 = 16, \\ wt_\omega(v_{2,3} v_{4,3}) &= \omega(v_{2,3}) + \omega(v_{2,3} v_{4,3}) + \omega(v_{4,3}) = 6 + 5 + 6 = 17, \\ wt_\omega(u_4 v_{3,3}) &= \omega(u_4) + \omega(u_4 v_{3,3}) + \omega(v_{3,3}) = 6 + 6 + 6 = 18. \end{aligned}$$

Formula tersebut dapat diterapkan. Selanjutnya, dibuktikan batas atas dari graf lintasan $comb$ sisi graf matahari ($P_4 \oplus_e S_3$) dengan

$$k = \lceil \frac{6(m-1)}{3} \rceil, \text{ jika } 6(m-1) \equiv 0 \pmod{6}.$$

Diberikan ω pada pelabelan- k graf lintasan $comb$ sisi graf matahari ($P_4 \oplus_e S_3$) sebagai berikut,

$$\omega(u_i) = 2(i-1), \text{ untuk } 1 \leq i \leq m,$$

$$\omega(v_{j,l}) = \{2(l-1), \frac{\text{untuk } j=1; 1 \leq l \leq m-1,}{\text{untuk } j=4; l=1,} 2l, \frac{\text{untuk } j=2,3; 1 \leq l \leq m-1,}{\text{untuk } j=4; 2 \leq l \leq m-1,}$$

$$\omega(u_i u_{i+1}) = 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq m-1,$$

$$\omega(u_i v_{j,l}) = \begin{cases} \frac{1,}{2,} & \text{untuk } j=4; l=1; i=2, \text{ dan } \text{untuk } j=4; l=2; i=3, \\ \text{untuk } j=4; l=1; i=1, \text{ dan } \text{untuk } j=4; l=2; i=2, \end{cases} 3l-2-i, \quad \text{untuk } j=4; 3 \leq l \leq m-1; i=l, \text{ dan}$$

Dari pembuktian batas bawah dan batas atas, dapat diketahui bahwa maksimum dari label titik dan sisi adalah $\lceil \frac{6(m-1)}{3} \rceil$ untuk $6(m-1) \equiv 0 \pmod{6}$. Dapat dilihat label titik merupakan bilangan bulat genap non negatif dan label sisi merupakan bilangan asli, sehingga diperoleh bobot sisi sebagai berikut,

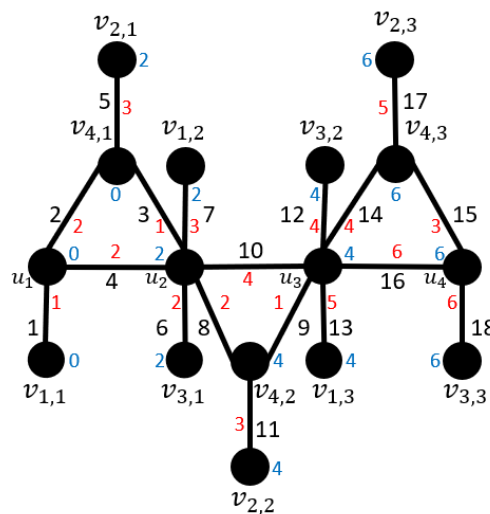
$$wt(u_i u_{i+1}) = 6(i-1) + 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq m-1,$$

$$wt(u_i v_{j,l}) = \begin{cases} 6(i-1) + 1, & \text{untuk } j=1; 1 \leq i \leq m-1; l=i, \\ 6(i-1) + 2, & \text{untuk } j=4; 1 \leq i \leq m-1; l=i, \end{cases} \frac{6(i-1)}{6(i-1)},$$

$$wt(v_{j,l} v_{j+2,l}) = 6(l-1) + 5, \text{ untuk } j=2; 1 \leq l \leq m-1.$$

Dari bobot sisi, dapat dilihat bahwa graf lintasan $comb$ sisi graf matahari $P_m \oplus_e S_3$ mempunyai bobot berbeda, sehingga ω memenuhi elemen pelabelan- k refleksif tak teratur sisi. Batas bawah sama dengan batas atas, oleh karena itu $res(P_m \oplus_e S_3)$ adalah $\lceil \frac{6(m-1)}{3} \rceil$ untuk $6(m-1) \equiv 0 \pmod{6}$. Dengan demikian, teorema terbukti. ■.

Berdasarkan Gambar 2 ditunjukkan pelabelan-6 tak teratur sisi pada graf lintasan $comb$ sisi graf matahari $P_4 \oplus_e S_3$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$. Pada gambar tersebut, angka berwarna biru menunjukkan label titik, angka berwarna merah menunjukkan label sisi, angka berwarna hitam menunjukkan bobot sisi, dan huruf berwarna hitam menunjukkan titik dari graf $P_4 \oplus_e S_3$.



Gambar 2. Pelabelan-6 refleksif tak teratur sisi graf $P_m \supseteq_e S_3$.

3. Simpulan

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh kesimpulan yaitu kekuatan sisi refleksif graf lintasan *comb* sisi graf matahari $P_m \supseteq_e S_3$ yaitu jumlah sisi $|E(G)| = 6(m - 1)$ dan titik $|V(G)| = 5(m - 1) + 1$. Berdasarkan jumlah sisi tersebut, kekuatan sisi refleksif graf $P_m \supseteq_e S_3$ yaitu $res(P_m \supseteq_e S_3)$ adalah $\lceil \frac{6(m-1)}{3} \rceil$ untuk $6(m - 1) \equiv 0 \pmod{6}$. Dengan demikian, telah ditunjukkan bahwa batas atas dan batas bawah dapat dicapai melalui konstruksi pelabelan yang menghasilkan bobot sisi yang berbeda. Oleh karena itu, nilai kekuatan sisi refleksif graf lintasan *comb* sisi graf matahari $P_m \supseteq_e S_n$ adalah sama dengan batas atas dan batas bawahnya. Penelitian ini sekaligus memperluas kajian pelabelan refleksif pada graf hasil operasi sisi dengan memberikan pola dan formula baru untuk graf lintasan *comb* sisi graf matahari. Penulis berharap bagi pihak yang tertarik dengan topik pelabelan refleksif tak teratur sisi maupun kekuatan sisi refleksif pada graf dapat melakukan penelitian untuk menentukan kekuatan sisi refleksif graf lintasan *comb* sisi graf matahari $P_m \supseteq_e S_n$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.

4. Ucapan Terima Kasih

Kami sampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Kementerian Pendidikan Tinggi, Sains, dan Teknologi atas dana penelitian yang diberikan melalui program Riset Fundamental Reguler dengan nomor kontrak 105/C3/DT.05.00/PL/2025 serta kepada LPPM UNS melalui Surat Perjanjian Penugasan Penelitian dengan nomor 1186.1/UN27.22/PT.01.03/2025.

Daftar Pustaka

- Bača, M., Irfan, M., Ryan, J., Semaničová-Fenovčíková, A., and Tanna, D. (2017). On Edge Irregular Reflexive Labellings for the Generalized Friendship Graphs. *Mathematics*, 67, 1–11.
- Bača, M., Miller, M., Ryan, J., and Jendroľ, S. (2007). On Irregular Total Labellings. *Discrete Mathematics*, 307(11–12), 1378–1388.
- Chartrand, G., Jacobson, M., Lehel, J., Oellermann, O. R., Ruiz, S., and Saba, F. (1988). Irregular Network. *Congressus Numerantium*, 187–192.
- Chartrand, G., and Lesniak, L. (1986). *Graphs and Digraphs* (2nd ed.). California: Wadsworth Inc.
- Indriati, R., Yeni, E., and Husnul, Y. (2020). Reflexive Edge Irregular Labeling on Corona Product of Paths and Complete Graphs. *Journal of Mathematics and Its Applications*, 19(2), 45–53.
- Setiawan, I., and Indriati, D. (2021). Edge Irregular Reflexive Labeling on Sun Graph and Corona of Cycle and Null Graph with Two Vertices. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 5(1), 35–45.
- Slamin, D., and Waspodo, A. G. (2018). Distance Domination Number of Graphs Resulting from Edge Comb Product. *Journal of Physics: Conference Series*, 1022(1), 012008.
- Tanna, D., J. Ryan, A. and Semaničová-Feňovíková. (2017). Edge Irregular Reflexive Labeling of Prisms and Wheels. *Australasian Journal of Combinatorics*, 69(3), 394–401.
- Wallis, W. D. (2001). *Magic Graphs*. Boston, MA: Birkhäuser.