



Kekuatan Sisi Reflektif Pada Graf Hasil Operasi *Comb Product* Sisi Graf Lintasan Dan Graf Layang-Layang

Yunita Puspita Dewi^{a,*}, Diari Indriati^b

^{a,b} Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret, Jalan IR. Sutami 36A Ketingan, Surakarta 57126, Indonesia,

* Alamat Surel:

Abstrak

Graf merupakan struktur yang terdiri atas himpunan titik $V(G)$ dan sisi $E(G)$ yang menghubungkan titik-titik tersebut. Pelabelan k -refleksif tak teratur sisi pada graf G adalah pemberian bilangan bulat positif $\{1, 2, \dots, k_e\}$ untuk label sisi dan bilangan genap dari $\{0, 2, \dots, 2k_v\}$ untuk label titik, dengan $k = \max\{k_e, 2k_v\}$ sehingga bobot pada setiap sisi dari graf G berbeda. Bobot sisi xy terhadap pelabelan χ dari graf G dinotasikan $wt(xy)$ dengan $wt(xy) = \chi(x) + \chi(xy) + \chi(y)$. Nilai minimum k pada graf G yang dapat dilabeli dengan pelabelan- k refleksif tak teratur sisi disebut dengan kekuatan sisi refleksif yang dinotasikan dengan $res(G)$

Graf layang-layang (m, t) -kite merupakan gabungan graf *cycle* dengan panjang (m) yang ditambahkan sebuah path sepanjang (t) yang incident pada salah satu titik *cycle*. Sementara itu, graf lintasan (P_n) adalah graf dengan (n) titik dan $(n - 1)$ sisi untuk $(n \geq 2)$. Dalam penelitian ini akan ditentukan kekuatan sisi refleksif $res(G)$ pada graf hasil operasi *comb product* sisi dan *comb product* graf lintasan dan graf layang-layang

Kata kunci:

Kekuatan sisi reflektif, pelabelan k -refleksif, graf layang-layang

© 2026 Dipublikasikan oleh Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang penting dalam matematika diskrit yang berfokus pada studi struktur yang disebut graf. Graf terdiri dari titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) yang menghubungkan titik-titik tersebut. Menurut (Wallis, 2001) sebuah graf dapat didefinisikan sebagai sebuah pasangan terurut yang terdiri dari dua komponen, yaitu $[V(G), E(G)]$. Di sini, $V(G)$ merujuk pada himpunan yang tidak kosong, dinotasikan sebagai $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ yang disebut sebagai titik dari graf G . Sementara itu, $E = E(G)$ merupakan himpunan yang terdiri dari pasangan-pasangan tidak terurut, dinotasikan sebagai $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$. Pasangan-pasangan ini diambil dari unsur-unsur yang berbeda dalam himpunan $V(G)$ dan dikenal sebagai sisi atau garis. Graf dapat dinyatakan sebagai $G = (V, E)$.

Pelabelan grafik merupakan suatu proses pemetaan yang mengaitkan elemen-elemen dalam grafik dengan angka, yang umumnya berupa bilangan bulat positif atau non-negatif. Domain yang paling sering digunakan dalam pelabelan ini meliputi himpunan semua titik sudut (dikenal sebagai pelabelan titik sudut), himpunan sisi saja (disebut pelabelan sisi), atau kombinasi dari semua titik sudut dan sisi (yang disebut pelabelan total) Bača *et al.* (2007). Selain itu, terdapat juga kemungkinan untuk menggunakan domain lain (Gallian, 2018)

To cite this article:

, , & (2026). Kekuatan Sisi Reflektif Pada Graf Hasil Operasi *Comb Product* Sisi Graf Lintasan Dan Graf Layang-Layang. PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 9, 436-440

Tanna *et al.* (2017), memperkenalkan tentang pelabelan k -refleksif tak teratur sisi pada graf G adalah pemberian label sisi melalui pemetaan $\chi_e: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dan label titik melalui pemetaan $\chi_v: V(G) \rightarrow \{0, 2, \dots, 2k\}$, dengan $k = \max\{k_e, 2k_v\}$ sehingga bobot pada setiap sisi berbeda.. Bobot sisi xy terhadap pelabelan χ dari graf G dinotasikan $wt(xy)$ dengan $w(xy) = \chi(x) + \chi(xy) + \chi(y)$. Nilai minimum k pada graf G yang dapat dilabeli dengan pelabelan- k refleksif tak teratur sisi disebut dengan kekuatan sisi refleksif yang dinotasikan dengan $res(G)$. Berikut adalah lema oleh Ryan *et al.* (Bača *et al.*, 2019)

Lema 1. Untuk setiap graf G ,

$$res(G) \geq \left\lceil \left\lfloor \frac{|E(G)|}{3} \right\rfloor \right\rceil, \quad \text{untuk } |E(G)| \not\equiv 2, 3 \pmod{6}, \left\lfloor \frac{|E(G)|}{3} \right\rfloor + 1, \quad \text{untuk } |E(G)| \equiv 2, 3 \pmod{6},$$

Pelabelan tak teratur sisi, terdapat beberapa graf yang sudah diteliti salah satunya Tanna *et al.* (2017) meneliti graf kipas F_n , graf roda W_n dan graf basket B_n . Pada penelitian ini akan ditentukan $res(G)$ dari graf lintasan *comb product* sisi graf layang-layang $P_n \triangleright_e (3, 1) - kite$

2. Pembahasan

Graf lintasan (P_n) adalah graf dengan (n) titik dan $(n - 1)$ sisi untuk $(n \geq 2)$. Sementara itu, graf layang-layang $(m, t) - kite$ merupakan gabungan graf *cycle* dengan panjang (m) yang ditambahkan sebuah path sepanjang (t) yang incident pada salah satu titik *cycle* (Wallis, 2001). Operasi *comb product* sisi didefinisikan sebagai berikut: misalkan G dan H adalah graf terhubung dan terdapat satu sisi tertentu $e \in E(H)$ yang disebut sisi cangkuk. Operasi *comb product* sisi antara G dan H , dinotasikan sebagai $G \triangleright_e H$. Graf lintasan *comb product* sisi graf layang-layang $P_n \triangleright_e (m, t) - kite$ adalah hasil operasi *comb product* sisi graf lintasan dengan graf layang-layang. Pada pembahasan ini akan dibahas graf lintasan *comb product* sisi $P_n \triangleright_e (m, t) - kite$ dengan $m = 3$ dan $t = 1$.

Graf lintasan *comb product* sisi graf layang-layang $P_n \triangleright_e (3, 1) - kite$ mempunyai $4(n - 1)$ sisi dan $3n - 2$ titik dengan himpunan titik $V(P_n \triangleright_e (3, 1) - kite) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \triangleright_e (3, 1) - kite) = \{u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{n1}, u_{n2}\}$. Kekuatan sisi reflektif dari graf hasil operasi *comb product* sisi pada graf lintasan dan graf layang-layang dapat diperoleh sebagai berikut,

Teorema 1. Untuk setiap bilangan bulat n, m, t dengan $m = 3$ dan $t = 1$

$$res(P_n \triangleright_e (3, 1) - kite) = \left\lceil \left\lfloor \frac{4(n-1)}{3} \right\rfloor \right\rceil, \quad \text{untuk } (4n - 4) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}, \left\lfloor \frac{4(n-1)}{3} \right\rfloor + 1, \quad \text{untuk } (4n - 4) \equiv 2, 3 \pmod{6}$$

Bukti Pertama dibuktikan batas bawah dari $res(P_n \triangleright_e (3, 1) - kite)$. Graf lintasan *comb product* sisi graf layang-layang $P_n \triangleright_e (3, 1) - kite$ mempunyai $4(n - 1)$ sisi. Dengan menggunakan Lema (1) diperoleh

$$res(P_n \triangleright_e (3, 1) - kite) \geq \left\lceil \left\lfloor \frac{4(n-1)}{3} \right\rfloor \right\rceil, \quad \text{untuk } 4(n - 1) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}, \left\lfloor \frac{4(n-1)}{3} \right\rfloor + 1, \quad \text{untuk } 4(n - 1) \equiv 2, 3 \pmod{6}$$

Penyataan tersebut ekuivalen dengan pernyataan:

$$res(P_n \triangleright_e (3, 1) - kite) \geq \left\lceil \left\lfloor \frac{4(n-1)}{3} \right\rfloor \right\rceil, \quad \text{untuk } (4n - 4) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}, \left\lfloor \frac{4(n-1)}{3} \right\rfloor + 1, \quad \text{untuk } (4n - 4) \equiv 2, 3 \pmod{6}$$

Selanjutnya, dibuktikan batas bawah dari $res(P_n \triangleright_e (3, 1) - kite)$ adalah 4 untuk $n = 3$. Graf lintasan *comb product* sisi graf layang-layang $P_3 \triangleright_e (3, 1) - kite$ mempunyai 7 titik ($v_1, v_2, v_3, u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}$) dan 8 sisi ($v_i v_{i+1}$) untuk $i = 1, 2, 3$; ($v_{i+1} u_{i1}$) untuk $i = 1, 2$; ($v_{i+1} u_{i2}$) untuk $i = 1, 2$; dan ($u_{i1} u_{i2}$) untuk $i = 1, 2$. Berdasarkan Lema (1) diperoleh batas bawah dari graf lintasan *comb product* sisi graf layang-layang $P_3 \triangleright_e (3, 1) - kite = 4$. Jadi, diasumsikan $res(P_3 \triangleright_e (3, 1) - kite) = 4$, didapatkan label terbesar titik dan sisi sebesar 4, maka kemungkinan label titik dan sisi dengan bobot sisi 1 hingga 8, sebagai berikut,

$$wt_f(v_1 v_2) = \lambda(v_1) + \lambda(v_1 v_2) + \lambda(v_2) = 0 + 1 + 0 = 1 \quad wt_f(v_2 u_{11}) = \lambda(v_2) + \lambda(v_2 u_{11}) + \lambda(u_{11}) = 0 + 2 + 0 = 2$$

Formula tersebut dapat diterapkan. Jadi 4 adalah bobot yang tepat untuk $res(P_3 \triangleright_e (3, 1) - kite)$.

Selanjutnya dibuktikan batas atas dari graf lintasan *comb product* sisi graf layang-layang $P_n \triangleright_e (3, 1) - kite$ dengan

$$k = \left\lceil \frac{4(n-1)}{3} \right\rceil, \quad \text{untuk } (4n - 4) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}, \quad \left\lceil \frac{4(n-1)}{3} \right\rceil + 1, \quad \text{untuk } (4n - 4) \equiv 2, 3 \pmod{6},$$

Dikonstruksikan λ pelabelan $-k$ pada graf lintasan *comb product* sisi graf layang-layang $P_n \triangleright_e (m, t) - kite$ sebagai berikut,

Label titik (v_i) untuk $1 \leq i \leq n$ sebagai berikut,

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } i = 1, 2 \\ 2 & \text{untuk } i = 3 \\ 2\lfloor \frac{2i}{3} \rfloor & \text{untuk } 4 \leq i \leq n \end{cases}$$

Label titik (u_{1i}) dan (u_{2i}) dengan untuk $1 \leq i \leq n - 1$ sebagai berikut,

$$\lambda(u_{1i}) = \lambda(u_{2i}) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } i = 1 \\ 2 & \text{untuk } i = 2 \\ 2\lfloor \frac{2i}{3} \rfloor & \text{untuk } 3 \leq i \leq n - 1 \end{cases}$$

Label sisi ($v_i v_{i+1}$) untuk $1 \leq i \leq n$ sebagai berikut,

$$\lambda(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } i = 1 \\ 3 & \text{untuk } i = 2 \\ 2\lfloor \frac{2i-5}{3} \rfloor + 1 & \text{untuk } 4 \leq i \leq n \end{cases}$$

Label sisi ($v_{i+1} u_{i1}$) dengan untuk $1 \leq i \leq n - 1$ sebagai berikut,

$$\lambda(v_{i+1} u_{i1}) = \begin{cases} 2 & \text{untuk } i = 1 \\ 4\lfloor \frac{i-2}{3} \rfloor - 2 & \text{untuk } 3 \leq i \leq n - 1 \end{cases}$$

Label sisi ($u_{i1} u_{i2}$) untuk $1 \leq i \leq n - 1$ sebagai berikut,

$$\lambda(u_{i1} u_{i2}) = \begin{cases} 3 & \text{untuk } i = 1 \\ 4\lfloor \frac{i-2}{3} \rfloor - 1 & \text{untuk } 3 \leq i \leq n - 1 \end{cases}$$

Label sisi ($u_{i2} v_{i+1}$) untuk $1 \leq i \leq n - 1$ sebagai berikut,

$$\lambda(u_{i2} v_{i+1}) = \begin{cases} 4 & \text{untuk } i = 1 \\ 4\lfloor \frac{i-2}{3} \rfloor & \text{untuk } 3 \leq i \leq n - 1 \end{cases}$$

Dari pembuktian batas bawah dan batas atas tersebut, dapat diketahui bahwa label maksimum label titik dan sisi adalah $\left\lceil \frac{4(n-1)}{3} \right\rceil$, untuk $(4n - 4) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}$ dan

$\left\lceil \frac{4(n-1)}{3} \right\rceil + 1$, untuk $(4n - 4) \equiv 2, 3 \pmod{6}$. Dapat diketahui label titik merupakan bilangan bulat genap, sehingga diperoleh bibit sisi sebagai berikut,

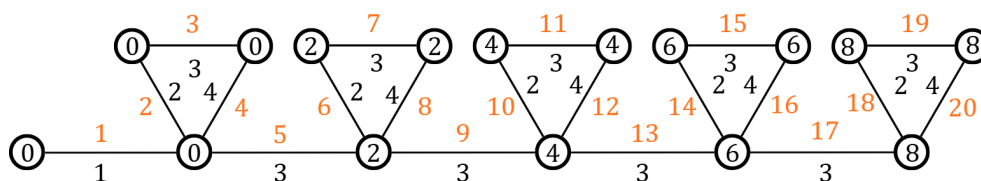
$$wt(v_i v_{i+1}) = 4i - 3, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n \quad wt(u_{i1} u_{i2}) = 4i - 1, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \quad wt(u_{ij} v_{i+1}) = 4i +$$

Dari bobot sisi dapat dilihat bahwa graf lintasan *comb product* sisi graf layang-layang $P_n \triangleright_e (3, 1) - kite$ mempunyai bobot sisi yang berbeda, sehingga λ memenuhi elemen pelabelan $-k$ refleksif tak teratur sisi. Batas bawah sama dengan batas atas, maka $res P_n \triangleright_e (3, 1) - kite$ adalah

$\lceil \frac{4(n-1)}{3} \rceil$, untuk $(4n - 4) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}$ dan $\lceil \frac{4(n-1)}{3} \rceil + 1$, untuk $(4n - 4) \equiv 2, 3 \pmod{6}$.

Dengan demikian teorema terbukti

Gambar 1 merupakan ilustrasi dari pelabelan-6 refleksif tak teratur sisi graf lintasan *comb product* sisi graf layang-layang $P_n \triangleright_e (3, 1) - \text{kite}$. Pada gambar tersebut, angka berwarna hitam menunjukkan label titik dan sisi, sedangkan angka berwarna oranye menunjukkan bobot sisi



Gambar 1. Pelabelan-6 refleksif tak teratur sisi graf $P_6 \triangleright_e (3, 1) - \text{kite}$

3. Simpulan

Berdasarkan pembahasan diatas diperoleh kesimpulan yaitu kekuatan sisi reflektif graf lintasan *comb product* sisi graf layang-layang $P_n \triangleright_e (3, 1) - \text{kite}$ adalah $\lceil \frac{4(n-1)}{3} \rceil$, untuk $(4n - 4) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}$ dan $\lceil \frac{4(n-1)}{3} \rceil + 1$, untuk $(4n - 4) \equiv 2, 3 \pmod{6}$. Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, penulis menyarankan agar penelitian selanjutnya dapat mengembangkan penelitian ini untuk menentukan kekuatan sisi reflektif graf lintasan *comb product* sisi graf layang-layang $P_n \triangleright_e (m, t) - \text{kite}$ untuk $n \geq 1$, $m \geq 3$ dan $t \geq 1$

4. Persembahan

Kami menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Kementerian Pendidikan Tinggi, Ilmu Pengetahuan, dan Teknologi atas dana penelitian melalui Program Riset Fundamental Reguler dengan nomor kontrak 105/C3/DT.05.00/PL/2025 dan Surat Perjanjian Penugasan Penelitian LLPM UNS nomor 1186.1/UN27.22/PT.01.03/2025.

Daftar Pustaka

- Bača, M., Irfan, M., Ryan, J., Semaničová-Feňovčíková, A., & Tanna, D. (2019). Note on edge irregular reflexive labelings of graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 16(2), 145–157.
- Bača, M., Jendrol', S., Miller, M., & Ryan, J. (2007). On irregular total labellings. *Discrete Mathematics*, 307(11–12), 1378–1388. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.11.075>
- Chartrand, G., Jacobson, M., Lehel, J., Oellermann, O. R., Ruiz, S., and Saba, F., (1988), Irregular Network, Congressus Numerantium, 187-192.
- Gallian, J. A. (2018). A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 1(DynamicSurveys), DS6.
- Tanna, D., Ryan, J., & SemaničováSemaničováSemaničováSemaničová, A. (2017). Edge irregular reflexive labeling of prisms and wheels *. In *Australasian Journal Of Combinatorics* (Vol. 69, Issue 3).
- Wallis, W. D. (2001). Magic Graphs. In *Magic Graphs*. Birkhäuser Boston. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0123-6>