



Kekuatan Sisi Refleksif pada Graf Lintasan *Comb Product* Graf Roda

Vitto Rendi Setiawan^{a*}, Diari Indriati^b

^{a,b} Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret, Jl. Ir. Sutami No. 36 A, Surakarta 57126, Indonesia

* Alamat Surel: vittorendisetiawan@student.uns.ac.id

Abstrak

Suatu graf G diasumsikan sebagai graf sederhana, tak berarah dan terhubung dengan himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik dan $E(G)$ disebut himpunan sisi. Jika setiap titik pada graf G dilabeli dengan bilangan genap nonnegatif $\{0, 2, \dots, 2k_v\}$ dan setiap sisinya dilabeli dengan bilangan bulat positif $\{1, 2, \dots, k_e\}$ sehingga diperoleh bobot dari masing-masing sisi berbeda, maka graf G dapat dinyatakan memiliki pelabelan- k refleksif tak teratur sisi, dimana $k = \max\{2k_v, k_e\}$. Bobot dari sisi uv terhadap pelabelan ϕ pada graf G yang dinotasikan $wt(uv)$ didefinisikan sebagai $wt(uv) = \phi(u) + \phi(uv) + \phi(v)$. Nilai k yang minimum dari label terbesar pada pelabelan graf G disebut dengan kekuatan sisi refleksif yang disimbolkan dengan $res(G)$. Dari penelitian yang telah dilakukan diperoleh $res(P_n \triangleright W_m)$ dengan $2 \leq n \leq 6$ dan $m \geq 3$ adalah $\lceil \frac{2mn+(n-1)}{3} \rceil$ untuk $2mn + (n - 1) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}$ dan $\lceil \frac{2mn+(n-1)}{3} \rceil + 1$ untuk $2mn + (n - 1) \equiv 2, 3 \pmod{6}$.

Kata kunci:

Kekuatan sisi refleksif, pelabelan- k refleksif tak teratur sisi, graf lintasan comb product graf roda.

© 2026 Dipublikasikan oleh Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang

1. Pendahuluan

Suatu graf G terdiri atas himpunan tak kosong berhingga yang disebut himpunan titik (*vertex*) yang dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi (*edge*) yang dimungkinkan kosong dinotasikan dengan $E(G)$ yang merupakan pasangan tak berurut dari setiap elemen $V(G)$ dalam Chartrand (1986). Salah satu topik yang sering dibahas dalam teori graf adalah pelabelan graf. Wallis (2001) menjelaskan bahwa pelabelan graf adalah suatu pemetaan yang memetakan unsur-unsur graf (titik dan sisi) ke bilangan bulat positif atau nonnegatif. Ada tiga jenis pelabelan graf yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan titik dan sisi atau biasa disebut dengan pelabelan total. Dari survei yang telah dilakukan oleh Gallian (2024), terdapat beberapa bentuk pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan- k total tak teratur. Menurut Bača *et al.* (2007), pelabelan total tak teratur terbagi menjadi pelabelan total tak teratur sisi dan pelabelan total tak teratur titik.

Kemudian terdapat pengembangan dari pelabelan- k total tak teratur yaitu pelabelan- k refleksif tak teratur titik dan pelabelan- k refleksif tak teratur sisi pada suatu graf yang diperkenalkan oleh Ryan *et al.* dalam Bača *et al.* pada tahun 2017. Suatu graf G mempunyai pelabelan- k refleksif tak teratur sisi jika titik-titiknya dilabeli dengan bilangan genap $(0, 2, \dots, 2k_v)$ dan sisi-sisinya dilabeli dengan bilangan bulat positif $(1, 2, \dots, k_e)$ dengan $k = \max\{k_e, 2k_v\}$ sedemikian sehingga bobot semua sisi dari graf G tersebut berbeda. Kekuatan refleksif tak teratur sisi yang dinotasikan dengan $res(G)$ merupakan nilai minimum k dari label terbesar. Berikut diberikan Lema untuk menentukan $res(G)$ menurut Ryan *et al.* (Bača *et al.* 2017).

To cite this article:

Setiawan, V. R. & Indriati, D. (2026). Kekuatan Sisi Refleksif pada Graf Lintasan *Comb Product* Graf Roda. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 9*, 441-446

Lema 1. Untuk setiap graf G

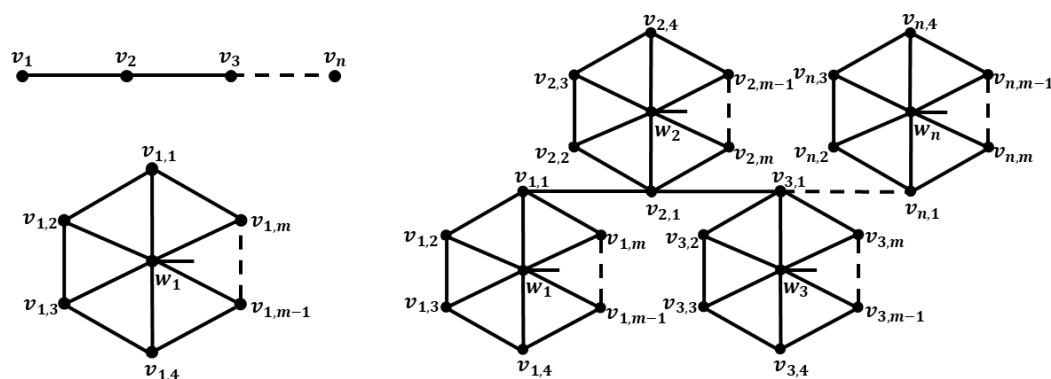
$$res(G) \geq \left\lceil \left\lfloor \frac{E(G)}{3} \right\rfloor \right\rceil, \quad \text{jika } |E(G)| \not\equiv 2, 3 \pmod{6}, \left\lfloor \frac{E(G)}{3} \right\rfloor + 1, \quad \text{jika } |E(G)| \equiv 2, 3 \pmod{6}. \quad (1)$$

Terdapat beberapa graf yang telah diteliti pada pelabelan- k refleksif tak teratur sisi, diantaranya graf prisma D_n , graf roda W_n , graf kipas F_n , dan graf keranjang B_n yang diteliti oleh Tanna *et al.* (2017), graf siklus korona graf null N_1 dan N_2 oleh Setiawan *et al.* (2021), graf prisma yang diperumum (*generalized prism*) oleh Irfan *et al.* (2022), graf sisir dengan 2 *pendant* yang diteliti oleh Nurhayati dan Susanti (2023), serta graf hasil operasi *comb product* pada graf siklus dan graf bintang oleh Vinatih dan Indriati (2025). Pada penelitian ini akan diteliti mengenai pelabelan- k refleksif tak teratur sisi serta ditentukan $res(G)$ dari graf lintasan *comb product* graf roda $(P_n \triangleright W_m)$ dengan $2 \leq n \leq 6$ dan $m \geq 3$.

2. Pembahasan

Menurut Maryati dan Hadiputra (2025), hasil operasi *comb product* dari graf G dan H yang dinotasikan dengan $G \triangleright H$ adalah graf yang dibentuk dari graf G dan sebanyak $|V(G)|$ salinan dari graf H . Setiap titik $u \in V(G)$ dihubungkan dengan satu salinan dari H dengan cara menempelkan satu titik u pada G dengan titik v tertentu pada salinan H tersebut. Dengan demikian, graf lintasan *comb product* graf roda adalah graf yang diperoleh dari graf lintasan P_n dan sebanyak $|V(P_n)|$ salinan dari graf roda W_m dimana setiap titik $u \in V(P_n)$ dihubungkan dengan satu salinan dari graf W_m dengan cara menempelkan satu titik pada graf lintasan P_n dengan titik v tertentu pada salinan graf roda W_m tersebut. Dalam hal penelitian ini, titik v pada graf W_m yang dimaksud adalah salah satu titik dari *cycle* di W_m . Graf lintasan *comb product* graf roda

terdiri atas himpunan titik $V(P_n \triangleright W_m) = \{v_{ij} : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\} \cup \{w_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \triangleright W_m) = \{v_{ij}v_{ij+1} : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m-1\} \cup \{v_{i,1}, v_{i,m} : i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_{ij}, w_i : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\}$ sehingga *order* $|V(P_n \triangleright W_m)| = (m+1)n$ dan *size* $|E(P_n \triangleright W_m)| = 2mn + (n-1)$.



Gambar 1. Graf $P_n, W_m, P_n \triangleright W_m; n \geq 6$ dan $m \geq 3$

Kekuatan sisi refleksif pada graf lintasan *comb product* graf roda $P_n \triangleright W_m$ diperoleh sebagai berikut

Teorema 1. Untuk semua bilangan bulat positif $2 \leq n \leq 6$ dan $m \geq 3$

$$res(P_n \triangleright W_m) = \{ \lceil \frac{2mn+(n-1)}{3} \rceil, \quad \text{jika } 2mn + (n-1) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}, \lceil \frac{2mn+(n-1)}{3} \rceil + 1, \text{ jika } 2mn + (n-1) \equiv 2, 3 \pmod{6} \}$$

Bukti. Ditunjukkan batas bawah $res(P_n \triangleright W_m)$. Diketahui jika jumlah sisi dari graf $P_n \triangleright W_m$ yaitu $2mn + (n-1)$, maka berdasarkan **Lema 1**, diperoleh

$$res(P_n \triangleright W_m) \geq \{ \lceil \frac{2mn+(n-1)}{3} \rceil, \quad \text{jika } 2mn + (n-1) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}, \lceil \frac{2mn+(n-1)}{3} \rceil + 1, \text{ jika } 2mn + (n-1) \equiv 2, 3 \pmod{6} \}$$

Batas bawah pada (2) sama dengan batas bawah $res(P_n \triangleright W_m)$ yang ditunjukkan oleh Ryan *et al.* pada (1). Selanjutnya ditunjukkan batas atas dari $res(P_n \triangleright W_m)$. Dikonstruksikan fungsi pelabelan ϕ pada pelabelan- k refleksif tak teratur sisi di graf $P_n \triangleright W_m$ dengan $k = \lceil \frac{2mn+(n-1)}{3} \rceil$, untuk $2mn + (n-1) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}$, dan $k = \lceil \frac{2mn+(n-1)}{3} \rceil + 1$, untuk $2mn + (n-1) \equiv 2, 3 \pmod{6}$. Penyesuaian nilai k ini dilakukan agar pelabelan yang dikonstruksi memenuhi sifat-sifat pelabelan refleksif yang diharapkan dan menghasilkan bobot untuk tiap sisi yang berbeda. Berikut ini merupakan konstruksi label dari graf $P_n \triangleright W_m$ dengan $2 \leq n \leq 6$ dan $m \geq 3$.

Label titik v_{ij} untuk $1 \leq i \leq 6$ dan $1 \leq j \leq m$.

$$\phi(v_{ij}) = \{0, \text{ untuk } i = 1, \frac{4}{3}m, \text{ untuk } i = 2 \text{ dan } m \equiv 0 \pmod{3}, \frac{4}{3}m + \frac{2}{3}, \text{ untuk } i = 2 \text{ dan } m \equiv 1 \pmod{3}, \frac{4}{3}m + \frac{1}{3}, \text{ untuk } i = 2 \text{ dan } m \equiv 2 \pmod{3}\}$$

Label titik w_i untuk $1 \leq i \leq 6$.

$$\phi(w_i) = \{2\lfloor \frac{m}{3} \rfloor, \text{ untuk } i = 1, 2, 2m + 2, \text{ untuk } i = 3, k, \text{ untuk } i = 4, m \equiv 0, 1 \pmod{3} \text{ dan } i > 4, k - 1, \text{ untuk } i = 4, m \equiv 2 \pmod{3}\}$$

Label sisi $v_{i,1}v_{i+1,1}$ untuk $1 \leq i \leq 5$.

$$\phi(v_{i,1}v_{i+1,1}) = \{2\lfloor \frac{m-3}{3} \rfloor + i + 2, \text{ untuk } i = 1, 2, \frac{5}{3}m + 1 - \lfloor \frac{m}{3} \rfloor, \text{ untuk } i = 3 \text{ dan } m \equiv 0 \pmod{3}, \frac{5}{3}m + \frac{4}{3} - \lfloor \frac{m}{3} \rfloor, \text{ untuk } i = 3 \text{ dan } m \equiv 1, 2 \pmod{3}\}$$

Label sisi $v_{ij}v_{ij+1}$ untuk $1 \leq i \leq 6$ dan $1 \leq j \leq m - 1$.

$$\phi(v_{ij}v_{ij+1}) = \{j, \text{ untuk } i = 1, \lfloor \frac{m}{3} \rfloor + 2 - (m \bmod 3) + j - 1, \text{ untuk } i = 2, j + 2, \text{ untuk } i = 3, \frac{5}{3}m + (j - 1), \text{ untuk } i = 4, 5, 6\}$$

Label sisi $v_{i,1}v_{i,m}$ untuk $1 \leq i \leq 6$.

$$\phi(v_{i,1}v_{i,m}) = \{m, \text{ untuk } i = 1, 4\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + 1, \text{ untuk } i = 2, m + 2, \text{ untuk } i = 3, m + 5\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 1, \text{ untuk } i = 4 \text{ dan } m \equiv 0, 1 \pmod{3}, m + 5\lfloor \frac{m}{3} \rfloor - 2, \text{ untuk } i = 4 \text{ dan } m \equiv 2 \pmod{3}\}$$

Label sisi $v_{ij}w_i$ untuk $1 \leq i \leq 6$ dan $1 \leq j \leq m$.

$$\phi(v_{ij}w_i) = \{m - 2\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + j, \text{ untuk } i = 1, j + 1, \text{ untuk } i = 2, m + j, \text{ untuk } i = 3, 2\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + 2(m \bmod 3) + (j - 1), \text{ untuk } i = 4, 5, 6\}$$

Berdasarkan pelabelan, diperoleh label maksimum dari titik dan sisi yaitu pada sisi $v_{1,m}w_1$ untuk $i = 1$, sisi $v_{2,1}v_{2,m}$ untuk $i = 2$ dan $m = 0 \bmod 3$, titik $v_{2,j}$ untuk $i = 2$ dan $m = 1, 2 \bmod 3$, titik w_i untuk $i \geq 3$, dan sisi $v_{4,1}v_{4,m}$ untuk $i = 4$ dan $m = 2 \bmod 3$. Dengan demikian, dapat disimpulkan batas atas dari $\text{res}(P_n \triangleright W_m)$ adalah sebagai berikut

$$\text{res}(P_n \triangleright W_m) \leq \begin{cases} \lceil \frac{2mn+(n-1)}{3} \rceil, & \text{jika } 2mn + (n - 1) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}, \\ \lceil \frac{2mn+(n-1)}{3} \rceil + 1, & \text{jika } 2mn + (n - 1) \equiv 2, 3 \pmod{6}. \end{cases}$$

Selanjutnya akan ditentukan bobot untuk tiap sisi pada graf lintasan *comb product* graf roda $P_n \triangleright W_m$.

Bobot sisi dari graf lintasan *comb product* graf roda $P_n \triangleright W_m$ adalah sebagai berikut

Bobot sisi $v_{i,1}v_{i+1,1}$ untuk $1 \leq i \leq 5$.

$$wt_\phi(v_{i,1}v_{i+1,1}) = i(2m + 1)$$

Bobot sisi $v_{ij}v_{ij+1}$ untuk $1 \leq i \leq 6$ dan $1 \leq j \leq m - 1$.

$$wt_\phi(v_{ij}v_{ij+1}) = \begin{cases} (4 \lfloor \frac{i}{2} \rfloor)m + i + j - 1, & \text{untuk } i \text{ ganjil}, \\ (4 \lfloor \frac{i}{2} \rfloor - 1)m + i + j - 1, & \text{untuk } i \text{ genap}. \end{cases}$$

Bobot sisi $v_{i,1}v_{i,m}$ untuk $1 \leq i \leq 6$.

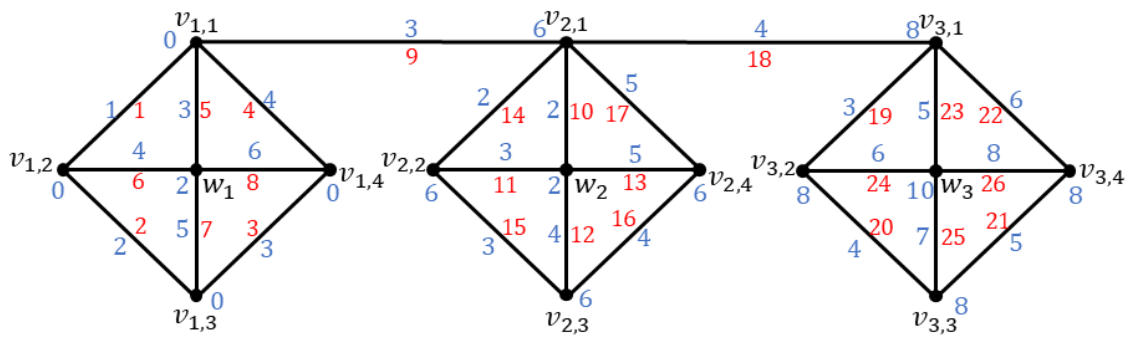
$$wt_\phi(v_{i,1}v_{i,m}) = m + (3m + 1)\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor + (m + 1)\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$$

Bobot sisi $v_{ij}w_i$ untuk $1 \leq i \leq 6$ dan $1 \leq j \leq m$.

$$wt_\phi(v_{ij}w_i) = \begin{cases} (4 \lfloor \frac{i}{2} \rfloor - 3)m + i + j - 1, & \text{untuk } i \text{ ganjil}, \\ (4 \lfloor \frac{i}{2} \rfloor - 2)m + i + j - 1, & \text{untuk } i \text{ genap}. \end{cases}$$

Dari bobot sisi yang telah diformulasikan, dapat disimpulkan bahwa semua sisi pada graf lintasan *comb product* graf roda $P_n \triangleright W_m$ memiliki bobot yang berbeda. Batas bawah $\text{res}(P_n \triangleright W_m)$ pada (2) sama dengan batas atas $\text{res}(P_n \triangleright W_m)$ pada (3) sehingga **Teorema 1** terbukti. ■

Berikut disajikan **Gambar 2**. yang menunjukkan pelabelan-10 refleksif tak teratur sisi pada graf lintasan *comb product* graf roda $P_3 \triangleright W_4$.



Gambar 2. Pelabelan-10 refleksif tak teratur sisi pada $P_3 \triangleright W_4$

Berdasarkan **Gambar 2**, bilangan dengan warna biru menunjukkan label titik dan sisi, sedangkan bilangan berwarna merah menunjukkan bobot sisi, serta huruf dengan warna hitam menunjukkan nama titik. **Gambar 2** menunjukkan pelabelan-10 refleksif tak teratur sisi pada graf $P_3 \triangleright W_4$ dengan label titiknya merupakan label bilangan genap dari 0 hingga 10 dan label sisinya merupakan label bilangan bulat positif dari 1 hingga 8 sedemikian sehingga $2k_v = 10$, $k_e = 8$, dan $k = \max\{10, 8\} = 10$. Dengan memperhatikan perhitungan bobot yang telah dilakukan dapat dilihat bahwa bobot setiap sisi berbeda, sehingga pelabelan pada **Gambar 2** dapat disebut dengan pelabelan-10 refleksif tak teratur sisi serta diperoleh kekuatan sisi refleksif dari graf $P_3 \triangleright W_4$ yaitu $\text{res}(P_3 \triangleright W_4) = 10$.

3. Simpulan

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh simpulan yaitu kekuatan sisi refleksif graf lintasan *comb product* graf roda $(P_n \triangleright W_m)$ untuk $2 \leq n \leq 6$ dan $m \geq 3$ yaitu

$$\text{res}(P_n \triangleright W_m) = \left\lceil \frac{2mn + (n-1)}{3} \right\rceil, \quad \text{jika } 2mn + (n-1) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}, \left\lceil \frac{2mn + (n-1)}{3} \right\rceil + 1, \quad \text{jika } 2mn + (n-1) \equiv 2, 3 \pmod{6}$$

Penulis berharap bagi pembaca yang tertarik dengan topik pelabelan- k refleksif tak teratur sisi dan kekuatan sisi refleksif pada graf dapat melakukan penelitian untuk menentukan kekuatan sisi refleksif pada kelas graf yang belum diteliti sebelumnya, seperti graf lintasan *comb product* graf roda untuk $n \geq 6$ atau graf roda *comb product* graf lintasan.

4. Ucapan Terima Kasih

Kami menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Kementerian Pendidikan Tinggi, Sains, dan Teknologi atas dana penelitian yang diberikan melalui program Riset Fundamental Reguler dengan nomor kontrak 105/C3/DT.05.00/PL/2025 serta kepada LPPM UNS melalui Surat Perjanjian Penugasan Penelitian dengan nomor 1186.1/UN27.22/PT.01.03/2025.

Daftar Pustaka

Bača, M., Jendrol' S., Miller, M., and Ryan, J. (2007). *On Irregular Total Labellings*, Discrete Mathematics, 307, 1378-1388.

- Bača, M., Irfan, M., Ryan, J., Semaničová-Feňovčíková, A., and Tanna, D. (2017). *On Edge Irregular Reflexive Labellings for the Generalized Friendship Graphs*, Mathematics, 67, 1-11.
- Chartrand, G., Lesniak, L. (1986). *Graph and Digraphs*, 2ed., Wadsworth Inc., California.
- Gallian, J. A. (2024). *A Dynamic Survey of Graph Labeling*, The Electronic Journal of Combinatorics, 1-712.
- Irfan, M., Bača, M., and Semaničová-Feňovčíková, A.. (2022). *On Reflexive Edge Strength of Generalized Prism Graphs*, Electronic Journal of Graph Theory and Applications, 10(2), 415-424.
- Maryati, T. K., and Hadiputra, F. F. (2025). *On H-Irregularity Strength of Comb and Edge Comb Product of Graphs*, Journal of Combinatorial Computing, 125, 255-269.
- Nurhayati, S. and Susanti, Y. (2023). *An Edge Irregular Reflexive k-labeling of Comb Graph with Additional 2 Pendants*, Jurnal Matematika Integratif, 1(19), 89-108.
- Setiawan, I., and Indriati, D. (2021). *Edge Irregular Reflexive Labeling on Sun Graph and Corona of Cycle and Null Graph with Two Vertices*, Indonesian Journal of Combinatorics, 5(1), 35-45.
- Tanna, D., Ryan, J., Semaničová-Feňovčíková, A., and Bača, M. (2020). *Edge Irregular Reflexive Labeling of Prism and Wheels*, Australian Journal of Combinatorics, 69(3), 394-401.
- Vinatih, R. S., and Indriati, D. (2025). *Edge Irregular Reflexive Labeling on Double Broom Graph and Comb of Cycle and Star Graph*. TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, 15(3), 748-761.
- Wallis, W. D. (2001). *Magic Graphs*, Birkhauser, Basel, Berlin.