

Kekuatan Sisi Refleksif Pada Graf Hasil Operasi *Comb Product* dari Graf Lintasan dan Graf Siklus ($P_n \triangleright_v C_m$)

Adelia Shinta Ayu Ningtyas^{a,*}, Diari Indriati^b

^aProgam Studi Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret, Jl. Ir. Sutami no 36A, Surakarta, Indonesia

* Alamat Surel: adeliasan30@student.uns.ac.id

Abstrak

Graf G terdiri atas himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$, sehingga dapat dinotasikan $G = (V, E)$. Pelabelan- k refleksif tak teratur sisi adalah pelabelan pada suatu graf dengan memberikan label bilangan genap dari $\{0, 2, \dots, 2k_v\}$ pada setiap titik, serta label bilangan bulat positif dari $\{1, 2, \dots, k_e\}$ pada setiap sisi graf G , dengan $k = \max\{k_v, 2k_v\}$, sehingga bobot setiap sisi berbeda. Nilai minimum k dari label terbesar pada suatu graf G disebut kekuatan tak teratur sisi refleksif dan dinotasikan dengan $res(G)$. Pada artikel ini dibahas pelabelan- k refleksif pada graf hasil operasi *comb product* antara graf lintasan dan graf siklus, yaitu $P_n \triangleright_v C_m$ dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 3$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa $res(P_n \triangleright_v C_m)$ untuk $n \geq 2, m \geq 3$ adalah $\left\lfloor \frac{nm+(n-1)}{3} \right\rfloor, nm + (n-1) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}$, dan $\left\lfloor \frac{nm+(n-1)}{3} \right\rfloor + 1$ untuk $nm + (n-1) \equiv 2, 3 \pmod{6}$.

Kata kunci: Pelabelan- k refleksif tak teratur sisi, kekuatan sisi refleksif, graf lintasan *comb product* graf siklus.

© 2026 Dipublikasikan oleh Jurusan Matematika, Universitas Negeri Semarang

1. Pendahuluan

Graf G merupakan himpunan tak kosong berhingga yang dinotasikan dengan $G = (V, E)$, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ sebagai himpunan titik dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$ sebagai himpunan sisi. Salah satu bidang yang dikaji dalam teori graf adalah pelabelan graf. Menurut Wallis (2001), pelabelan graf adalah suatu pemetaan yang memasang elemen-elemen pada graf, baik titik maupun sisinya, dengan bilangan bulat positif atau non-negatif. Pada tahun 2007, pelabelan- k total tak teratur titik (*vertex irregular total k-labeling*) dan pelabelan- k total tak teratur sisi (*edge irregular total k-labeling*) diperkenalkan oleh Bača et al. (2007).

Ryan et al. dalam Bača et al. (2017) mengembangkan kembali konsep pelabelan total tak teratur yaitu pelabelan- k refleksif tak teratur titik dan pelabelan- k refleksif tak teratur sisi, jika setiap titiknya dapat dilabeli dengan bilangan genap dari 0 hingga $2k_v$, dan sisi-sisinya dapat dilabeli dengan bilangan bulat positif dari 1 hingga k_e sedemikian sehingga bobot untuk semua sisi pada graf G memiliki nilai yang berbeda. Bobot dari suatu sisi vv' terhadap pelabelan ψ pada graf G dinotasikan $wt_\psi(vv')$ adalah penjumlahan dari label titik v , label sisi vv' , dan label titik v' , yaitu $wt_\psi(vv') = \psi(v) + \psi(vv') + \psi(v')$. Kekuatan sisi refleksif dari graf G yang dinotasikan dengan $res(G)$ adalah nilai minimum k pada graf G , dengan k merupakan label terbesar pada suatu graf G . Berikut Lema untuk menentukan $res(G)$ oleh Ryan et al. dalam Bača et al. (2017).

Lema 1. Untuk setiap graf G

$$res(G) \geq \begin{cases} \left\lfloor \frac{|E(G)|}{3} \right\rfloor, & \text{jika } |E(G)| \not\equiv 2, 3 \pmod{6}, \\ \left\lfloor \frac{|E(G)|}{3} \right\rfloor + 1, & \text{jika } |E(G)| \equiv 2, 3 \pmod{6}. \end{cases}$$

Pada penelitian ini, operasi yang digunakan adalah operasi *comb product*. Operasi *comb product* pada graf G dan H , adalah graf yang diperoleh dari satu salinan graf G dan $|V(G)|$ salinan graf H , sedemikian sehingga setiap titik $u \in V(G)$ ditempelkan dengan titik v dari suatu salinan H (Maryati & Hadiputra, 2025).

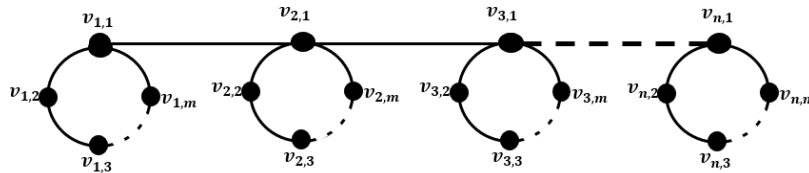
To cite this article:

Ningtyas, A. S. A., dan Indriati, D. (2026). Kekuatan Sisi Refleksif pada Graf Hasil Operasi *Comb Product* dari Graf Lintasan dan Graf Siklus ($P_n \triangleright_v C_m$). PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 9, 412-415

Beberapa penelitian telah dilakukan seperti pelabelan sisi pada berbagai graf dengan beragam pendekatan, seperti pelabelan-k refleksif tak teratur sisi maupun jenis pelabelan lainnya. Di antaranya, graf siklus korona graf *null* ($C_n \odot N_2$) telah diteliti oleh Setiawan dan Indriati (2021), sedangkan graf korona dari graf lintasan serta beberapa graf lainnya diteliti oleh Indriati *et al.* (2020). Selain itu, Syihabuddin & Rosyida (2022) juga telah meneliti graf pohon palem $C_r - B_{r,r}$ dan graf pohon palem $C_{r+1} - B_{r,r}$. Lebih lanjut, penelitian mengenai operasi *comb product* juga telah dilakukan pada berbagai jenis graf untuk mengamati karakteristik dan parameter grafnya. Misalnya, Soewongsono *et al.* (2024) meneliti zonal labeling *comb product* sisi pada suatu graf. Penelitian ini akan ditentukan $res(G)$ dari graf lintasan *comb product* graf siklus ($P_n \triangleright_v C_m$) untuk $n \geq 2, m = 3$.

2. Pembahasan

Graf lintasan *comb product* graf siklus yang dinotasikan dengan ($P_n \triangleright_v C_m$) merupakan graf yang diperoleh dari satu salinan graf lintasan dan $|V(P_n)|$ salinan graf siklus C_m , sedemikian sehingga setiap titik $v \in V(P_n)$ ditempelkan dengan titik v dari suatu salinan graf siklus C_m . Graf lintasan *comb product* graf siklus ($P_n \triangleright_v C_m$) memiliki $|E(P_n \triangleright_v C_m)| = mn + (n - 1)$. Himpunan titik pada graf $V(P_n \triangleright_v C_m) = \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisinya $E(P_n \triangleright_v C_m) = \{v_{ij}v_{i,j+1} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{v_{ij}v_{i+1,j} \mid 1 \leq i \leq n, j = 1\}$. Graf lintasan *comb product* graf siklus diilustrasikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf Lintasan Comb Product Graf Siklus ($P_n \triangleright_v C_m$) $n \geq 2$ dan $m \geq 3$

Kekuatan sisi refleksif pada graf lintasan *comb product* graf siklus ($P_n \triangleright_v C_m$) untuk $n \geq 2, m = 3$ dapat diperoleh melalui Teorema 1.

Teorema 1. Untuk setiap bilangan bulat n, m dengan $n \geq 2, m = 3$.

$$res(P_n \triangleright_v C_m) = \begin{cases} \left\lceil \frac{mn + (n - 1)}{3} \right\rceil, & \text{jika } nm + (n - 1) \not\equiv 2, 3 \pmod{6} \\ \left\lceil \frac{mn + (n - 1)}{3} \right\rceil + 1, & \text{jika } nm + (n - 1) \equiv 2, 3 \pmod{6}. \end{cases} \quad (1)$$

Bukti. Pertama dibuktikan batas bawah $res(P_n \triangleright_v C_m)$. Graf lintasan *comb product* graf siklus mempunyai $|E(P_n \triangleright_v C_m)| = nm + (n - 1)$. Dengan lema (1) maka diperoleh

$$res(P_n \triangleright_v C_m) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{mn + (n - 1)}{3} \right\rceil, & \text{untuk } nm + (n - 1) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}, \\ \left\lceil \frac{mn + (n - 1)}{3} \right\rceil + 1, & \text{untuk } nm + (n - 1) \equiv 2, 3 \pmod{6}. \end{cases} \quad (2)$$

Pada langkah selanjutnya, akan ditetapkan batas atas dari $res(G)$ untuk graf lintasan *comb product* graf siklus ($P_n \triangleright_v C_m$) dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 3$. Pelabelan ψ dibangun sebagai pelabelan-k untuk graf ($P_n \triangleright_v C_m$), di mana nilai k ditentukan sebagai $k = \left\lceil \frac{mn + (n - 1)}{3} \right\rceil$ untuk $nm + (n - 1) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}$, dan $k = \left\lceil \frac{mn + (n - 1)}{3} \right\rceil + 1$ untuk $nm + (n - 1) \equiv 2, 3 \pmod{6}$.

Berikut dikonstruksikan pelabelan-k refleksif tak teratur sisi pada graf $P_n \triangleright_v C_m$ dengan $n \geq 2$ dan $m = 3$ untuk label titik $v_{i,j}$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$ sebagai berikut

$$\psi(v_{i,j}) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } i = 1, 1 \leq j \leq 3, \\ 2 \left\lceil \frac{2i + 1}{3} \right\rceil, & \text{untuk } i \geq 2, 1 \leq j \leq 3, \\ \frac{4i - 2}{3}, & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3}, i \geq 5, \text{ dan } 1 \leq j \leq 3. \end{cases}$$

Selanjutnya untuk label setiap sisi-sisi pada graf lintasan *comb product* graf siklus ($P_n \triangleright_v C_m$) dengan $n \geq 2$ dan $m = 3$, sebagai berikut

$$\psi(v_{i,1}v_{i,2}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq 4, \\ 5 + 4 \left\lfloor \frac{i-5}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } 5 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$\psi(v_{i,2}v_{i,3}) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq 4, \\ 6 + 4 \left\lfloor \frac{i-5}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } 5 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$\psi(v_{i,3}v_{i,1}) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } 1 \leq i \leq 4, \\ 7 + 4 \left\lfloor \frac{i-5}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } 5 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$\psi(v_{i,1}v_{i+1,1}) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } i = 1, \\ 2 \left\lfloor \frac{2i-1}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Setelah dikonstruksikan ke pelabelan untuk setiap titik dan sisi pada graf $P_n \triangleright_v C_m$ dengan $n \geq 2$ dan $m = 3$, diperoleh bobot wt_ψ untuk setiap sisi dari $v_{i,j}v_{i,j+1}$ untuk $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq 3$, sebagai berikut

$$wt_\psi(v_{i,j}v_{i,j+1}) = 4i + j - 4, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2.$$

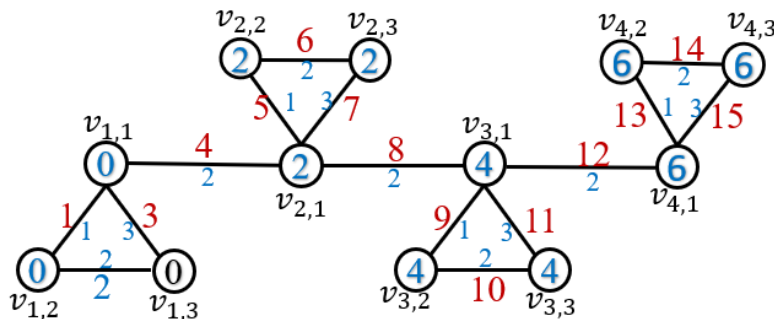
$$wt_\psi(v_{i,j}v_{i,j+2}) = 4i + j - 4, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n, j = 1.$$

Sedangkan bobot untuk sisi $wt_\psi v_{i,1}v_{i+1,1}$, dengan $1 \leq i \leq n$ dan $j = 1$, adalah sebagai berikut

$$wt_\psi(v_{i,1}v_{i+1,1}) = 4i, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n.$$

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, diperoleh bahwa seluruh bobot sisi pada graf lintasan *comb product* graf siklus ($P_n \triangleright_v C_m$) dengan $n \geq 2$ dan $m = 3$ berbeda. Nilai batas bawah dan batas atasnya sama dengan $res(P_n \triangleright_v C_m)$. Dengan demikian, fungsi ψ memenuhi syarat sebagai elemen pelabelan- k refleksif tak teratur sisi serta memiliki kekuatan sisi refleksif $res(P_n \triangleright_v C_3)$ yaitu $\left\lfloor \frac{mn+(n-1)}{3} \right\rfloor$ untuk $nm + (n-1) \not\equiv 2,3 \pmod{6}$ dan $\left\lfloor \frac{mn+(n-1)}{3} \right\rfloor + 1$ untuk $nm + (n-1) \equiv 2,3 \pmod{6}$ yang sesuai dengan Teorema 1. Oleh karena itu, teorema tersebut terbukti. ■

Ilustrasi pelabelan-6 refleksif tak teratur sisi graf lintasan *comb product* graf siklus ($P_4 \triangleright_v C_3$) ditunjukkan pada Gambar 2. Pada Gambar 2, huruf berwarna hitam merupakan nama titik, angka berwarna biru menunjukkan label titik dan sisi, sedangkan angka berwarna merah menunjukkan bobot sisi.



Gambar 2. Pelabelan-6 refleksif graf $P_4 \triangleright_v C_3$

3. Simpulan

Berdasarkan pembahasan, diperoleh kesimpulan yaitu kekuatan sisi refleksif graf lintasan *comb product* graf siklus ($P_n \triangleright_v C_m$) dengan $n \geq 2$ dan $m = 3$, yaitu $\left\lceil \frac{mn+(n-1)}{3} \right\rceil$ untuk $nm + (n - 1) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}$, $\left\lceil \frac{mn+(n-1)}{3} \right\rceil + 1$ untuk $nm + (n - 1) \equiv 2, 3 \pmod{6}$. Penulis berharap bagi pihak yang tertarik dengan topik pelabelan- k refleksif tak teratur sisi maupun kekuatan sisi refleksif pada graf dapat melakukan penelitian untuk menentukan kekuatan sisi refleksif dari graf siklus *comb product* graf lintasan dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.

4. Ucapan Terima Kasih

Kami menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Kementerian Pendidikan Tinggi, Sains, dan Teknologi atas dana penelitian yang diberikan melalui program Riset Fundamental Reguler dengan nomor kontrak 105/C3/DT.05.00/PL/2025 serta kepada LPPM UNS melalui Surat Perjanjian Penugasan Penelitian dengan nomor 1186.1/UN27.22/PT.01.03/2025.

Daftar Pustaka

- Bača, M., Jendrol', S., Miller, M., & Ryan, J. (2007). On Irregular Total Labeling. *Discrete Mathematics*, 307(11–12), 1378–1388.
- Bača, M., Irfan, M., Ryan, J., Semaničová-Feňovíková, A., & Tanna, D. (2017). On Edge Irregular Reflexive Labellings for the Generalized Friendship Graphs. *Mathematics*, 5(4), 67.
- Indriati, D., Widodo, & Rosyida, I. (2020). Edge Irregular Reflexive Labeling on Corona of Path and other Graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, 855, 012004.
- Maryati, T. K., & Hadiputra, F. F. (2025). On H-Irregularity Strength of Comb and Edge Product of Graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 255–269.
- Setiawan, I., & Indriati, D. (2021). Edge Irregular Reflexive Labeling on Sun Graph and Corona of Cycle and Null Graph with Two Vertices. *Indonesia Journal of Combinatorics*, 5(1), 35–45.
- Syihabuddin, M., & Rosyida, I. (2022). Ketakteraturan Sisi Total pada Graf Pohon Palem $C_r - B_{r,r}$ dan Graf Pohon palem $C_{r+1} - B_{r,r}$. *Indonesian Journal of Mathematics and Natural Sciences*, 59–68.
- Soewongsono, J. C., Putra, G. L., Ariyanto, & Pangaribuan, R. M. (2024). Zonal Labeling on Edge Comb Product of Two Graphs. *Jurnal Matematika UNAND*, 13(4), 388–395.
- Wallis, W. D. (2001). Magic graphs. *Birkhäuser, Basel*, Berlin.